Aufgabe 441 Zwei Personen bewegen sich von je einem Startpunkt in je eine Richtung mit der Geschwindigkeit 1 m/s. Die erste Person startet in $A = (0, 4)$ in die Richtung $\vec{a} = \binom{1}{0}$ und die zweite Person im Punkt $B = (3, 0)$ in die Richtung $\vec{b} = \binom{0}{1}$. Die Koordinateneinheit sei 1 m.

a) Skizzieren Sie die Situation zu den ganzzahligen Zeitpunkten $0 \leq t \leq 5$.

b) Schätzen Sie die kleinste Distanz der beiden Personen.

c) Berechnen Sie die Distanz der beiden Personen in Abhängigkeit der Zeit t (das Resultat ist eine Funktion von t).

d) Bestimmen Sie die Extremalstelle der Distanzfunktion.

e) Lösen Sie folgende verallgemeinerte Variante mit dem TR mit $A = (0, 2)$ und $\vec{a} = \binom{2}{1}$ und $B = (5, 0)$ und $\vec{b} = \binom{-1}{1}$.

f) Animieren Sie die Situation mit POV-Ray.

Aufgabe 442 Die Marschtruppe steht in einem quadratischen Raster. Die Anzahl Personen soll immer eine ungerade Quadratzahl sein, damit es eine Person im Mittelpunkt gibt. Die Koordinaten dieser mittleren Person bestimmen die Position der ganzen Truppe.
Beschrieben wird die Anzahl Personen mit $(2n + 1)^2$, wobei $n \in \mathbb{N}$.
Der Abstand d zwischen den Personen soll 2 m betragen.
Die Marschgeschwindigkeit soll 1 m/s betragen.

a) Wie gross ist das Raster in Abhängigkeit von n?

b) Die Wege der beiden mittleren Personen schneiden sich in einem Punkte S. Wenn eine der mittleren Personen in S ist, wie weit davon entfern muss die andere mittlere Person sein, damit sich die Gruppen «schön» durchdringen?

c) Bestimmen Sie eine geeignete Startpositionen (beide Gruppen noch getrennt) auf den Koordinatenachsen für die zwei Marschtruppen, in Abhängigkeit von n. Man nimmt an, dass die Gruppen achsenparallel marschieren.

d) Bestimmen Sie eine geeignete Zeitdauer (bis beide Gruppen wieder getrennt sind) für die Animiation, in Abhängigkeit von n.

e) Programmieren Sie die Situation in POV-Ray.

22.4 Skalarprodukt

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ergibt eine Zahl. Diese Zahl lässt sich auf zwei ganz unterschiedliche Arten berechnen. Meist wird das Skalarprodukt auf die eine Art berechnet und auf die andere Art interpretiert.

Definition 58 Skalarprodukt

Das Skalarprodukt ist wie folgt definiert:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\left(\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})\right),$$

wobei $\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})$ gleich dem Winkel ist, der von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannt wird, wenn man die Vektoren mit Pfeilen mit gleichem Anfangspunkt zeichnet.
Auf dem TR kann mit `dotP(u,v)` das Skalarprodukt berechnet werden. Zu finden mit «menu 7 C 3».