d) Man sucht ein λ so, dass $\vec{OG}(\lambda) = \vec{OD}$. Wir lösen also die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = (8, -8, 1)\,.$$

Die Gleichung muss für jede Komponente erfüllt sein. Man löst also die erste Gleichung auf und überprüft, ob diese Lösung auch für die weiteren Komponenten gültig ist.

$$\text{Erste Komponente: } 3 - 5\lambda = 8 \quad \Rightarrow \lambda = -1.$$

Eingesetzt in die zweite und dritte Komponente erhalten wir wahre Aussagen. Also $\vec{OG}(-1) = \vec{OD}$ und damit liegt D auf g.

e) In einer Parameterdarstellung wird jeweils das λ-fache des Richtungsvektors addiert. Die Distanz vom Startpunkt der Geraden entspricht also dem λ-fachen der Länge des Richtungsvektors. Wir müssen also einen Richtungsvektor wählen, der die Länge 1 hat, z.B. $\vec{w} = \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{61}} \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$. Der Starpunkt muss B sein. Damit erhalten wir:

$$\vec{OG}(\lambda) = \vec{OB} + \lambda \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \frac{1}{\sqrt{61}} \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

f) Die x-Koordinate ist Null für alle Punkte in der yz-Ebene. Wir suchen also λ so, dass die erste Komponente 0 ist:

$$3 - 5\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{3}{5}$$

Wir setzen ein:

$$\vec{OG}\left(\frac{3}{5}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{5} \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{8}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

g) Wir suchen λ so, dass $|\vec{OG}(\lambda)| = 10$. Diese Gleichung kann nach λ aufgelöst werden. Mit dem TR kann diese Gleichung wie folgt lösen:

`[3,-2,1]+l*[-6,5,0]` $\to$ `g(l)` *Parameterdarstellung als Funktion*
`zeros(norm(g(l)-10, l))` $\to$ `ls` *Gleichung lösen.*
`g(ls[1])` *1. Gesuchter Punkt, mit erstem Element der Liste der Lösungen*
`g(ls[2])` *2. Gesuchter Punkt*

Hinweis: Zeros liefert eine Liste von Werten. Leider können Listen nicht mit Vektoren verrechnet werden. Darum werden die beiden Punkte einzeln berechnet mit Zugriff auf das erste und zweite Element der Liste (`ls[1]` und `ls[2]`).

Man erhält für λ zwei Werte: $\lambda_1 = \frac{5\sqrt{239}-27}{61}$ und $\lambda_2 = \frac{5\sqrt{239}+27}{61}$, oder ungefähr $\lambda_1 \approx -0.8246$ und $\lambda_2 \approx 1.710$.

Eingesetzt in die Parameterdarstellung erhält man die Punkte $P_1 \approx (7.123, -6.947, 1)$ und $P_2 \approx (-5.549, 8.259, 1)$.

Lösung zu Aufgabe 441 ex-minimal-distanz-in-der-zeit

Die Bewegungen können mit Geradenparametrisierungen beschrieben werden.

$$\vec{OP_1}(t) = \vec{OA} + t\vec{a} \qquad \vec{OP_2}(t) = \vec{OB} + t\vec{b}$$

c) $d(t) = |\vec{P_1P_2}| = \left|\vec{OB} + t\vec{b} - \left(\vec{OA} + t\vec{a}\right)\right| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3-t \\ t-4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(3-t)^2 + (t-4)^2} = \sqrt{2t^2 - 14t + 25}$

d) Anstatt von $d(t)$ kann auch das Minium von $(d(t))^2)$ bestimmt werden. Da $(d(t))^2 = 2t^2 - 14t + 25$ eine quadratische Funktion ist, kann auch einfach der Scheitelpunkt bestimmt werden (oder Ableiten und Nullsetzen, um die Extremalstelle zu bestimmen).