```
w:matrix([u2*v3-u3*v2, u3*v1-u1*v3, u1*v2-u2*v1]);
u.u * v.v - (u.v)^2 - w.w;
```

$$-\left(u_3\,v_3+u_2\,v_2+u_1\,v_1\right)^2+\left(u_3^2+u_2^2+u_1^2\right)\,\left(v_3^2+v_2^2+v_1^2\right)+\left(u_3\,v_2-u_2\,v_3\right)\,\left(u_2\,v_3-u_3\,v_2\right)+\left(u_3\,v_1-u_1\,v_3\right)\,\left(u_1\,v_3-u_3\,v_1\right)+\left(u_2\,v_1-u_1\,v_2\right)\,\left(u_1\,v_2-u_2\,v_1\right)$$

```
expand(u.u * v.v - (u.v)^2 - w.w);
```

$$0$$

Die korrekte Händigkeit kann wie folgt überprüft werden: Man setzt für $\vec{u}=\vec{e}_1$ und $\vec{v}=\vec{e}_2$ ein und erhält wie gewünscht

$$\vec{w}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\vec{e}_3,$$

also die korrekte Händigkeit. Um zu zeigen, dass die Händigkeit für alle Vektoren gültig ist, stellen wir uns vor, dass $\vec{u}$ und $\vec{v}$ zusammen kontinuierlich im Raum gedreht werden. Damit muss sich auch $\vec{w}$ kontinuierlich mitdrehen, weil die Formeln für $\vec{w}$ keine «Sprünge» zulassen. Damit ist es nicht möglich, dass $\vec{w}$ plötzlich die Händigkeit (d.h. das Vorzeichen) wechselt.

### Lösung zu Aufgabe 450 ex-crossp-von-hand

a) $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 1-(-1)\cdot 2\\(-1)\cdot(-3)-1\cdot 1\\1\cdot 2-2\cdot(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\\8\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\-3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-1)\cdot 1-3\cdot(-3)\\3\cdot(-2)-2\cdot 1\\2\cdot(-3)-(-1)\cdot(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-8\\-8\end{pmatrix}$

### Lösung zu Aufgabe 451 ex-eigenschaften-vektor-produkt

a) Falsch. Beim Vertauschen ändert die Orientierung. Richtig ist $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$.

b) Richtig, weil $\vec{a}$ und $\vec{a}\times\vec{b}$ orthogonal sind, ist das Skalarprodukt 0 ($\cos(90°)=0$).

c) Falsch. Die aufgespannte Fläche ist 0 ($\sin(0°)=0$), das Resultat ist aber der Nullvektor, nicht die Zahl 0. Korrekt wäre $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$.

d) Falsch. In diesem Fall ist die Länge vom Produkt gleich dem Produkt der Längen ($\sin(90°)=1$).

e) Falsch. Die Dreiecksfläche ist die Hälfte der Parallelogrammfläche. Es gilt also $F=\frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|$.

f) Das Vektorprodukt zweier Vektoren einer Ebene ergibt einen Vektor senkrecht zu dieser Ebene. Das Skalarprodukt zweier Vektoren mit gleicher Richtung ist aber das betragsmässig das Produkt der Längen. Richtig (und nützlich) wäre z.B. $(\vec{AB}\times\vec{AC})\times(\vec{AB}\times\vec{AD})=\vec{0}$