Lösung zu Aufgabe 452 ex-repe-vektor-basics

Für den TR werden die Vektoren $\vec{OA}$ etc. in `a,b,c` gespeichert.

a) $|\vec{AB}| = |\vec{OB} - \vec{OA}| = \left|\begin{pmatrix}-1\\-1\\-4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

$\vec{AC} = \left|\begin{pmatrix}0\\-6\\6\end{pmatrix}\right| = \sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}$.

TR: `norm(b-a)` und `norm(c-a)`.

b) $\cos(\alpha) = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{|\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|} = \frac{-18}{3\sqrt{2}\cdot 6\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$. Also $\alpha = \arccos(-0.5) = 120°$.

c) Nein, weil ein Winkel bereits grösser als 90° ist. Alternativ könnten die Skalarprodukte $\vec{BA}\cdot\vec{BC}$ und $\vec{CA}\cdot\vec{CB}$ berechnet und festgestellt werden, dass diese nicht null sind.

d) $F = \frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}| = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}-30\\6\\6\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{972} = \frac{1}{2}\sqrt{12\cdot 81} = \frac{1}{2}\sqrt{3\cdot 4\cdot 81} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot 2\cdot 9 = 9\sqrt{3}$

TR: `norm(crossP(b-a,c-a))/2` (Die Reihenfolge spielt hier keine Rolle, da nur die Länge, nicht aber die Richtung gebraucht wird).

e) $\vec{OM_{BC}} = \frac{1}{2}(\vec{OB}+\vec{OC}) = \begin{pmatrix}\frac{9}{2}\\\frac{1}{2}\\-2\end{pmatrix}$, also $M_{BC} = (\frac{9}{2}, \frac{1}{2}, -2)$.

TR: `(b+c)/2` $\to$ `m`

f) $\vec{OS} = \frac{1}{3}\cdot\left(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}\right) = \begin{pmatrix}\frac{14}{3}\\\frac{5}{3}\\-\frac{7}{3}\end{pmatrix}$

TR: `(a+b+c)/3` $\to$ `s`

g) $g:\ \vec{OG}(\lambda) = \vec{OA} + \lambda\vec{AM_{BC}} = \begin{pmatrix}5\\4\\-3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{7}{2}\\1\end{pmatrix}$.

TR: `a+l*(m-a)` $\to$ `g(l)`

h) S liegt auf g, wenn die Gleichung $\vec{OG}(\lambda) = \vec{OS}$ eine Lösung für λ hat. Die erste Komponente der Gleichung lautet $5 + (-\frac{1}{2})\lambda = \frac{14}{3}$, woraus $\lambda = \frac{2}{3}$ folgt. Setzt man diese Lösung in die anderen Komponenten ein, stellt man fest, dass die Gleichung eine wahre Aussage ergibt, also $S \in g$.

TR: `solve(g(l)=s,l)` ergibt eine Lösung. (Anderfalls würde man `false` (Falsche Aussage, Gleichung nicht lösbar) erhalten.

Bonus. Allgemein erhält man die Gleichung

$$\vec{OA} + \lambda\left(\frac{1}{2}(\vec{OB}+\vec{OC}) - \vec{OA}\right) = \frac{1}{3}\cdot\left(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}\right)$$

Da die drei Punkte völlig unabhängig sind, muss die Gleichung auch dann gültig sein, wenn B, C im Ursprung liegen. Die Gleichung ist dann

$$\vec{OA} - \lambda\cdot\frac{1}{2}\vec{OA} = \frac{1}{3}\vec{OA},$$

mit der Lösung $\lambda = \frac{2}{3}$. Eingesetzt in die Ursprungsgleichung stellt man fest, dass die Gleichung so erfüllt wird.