Also

$$\begin{cases} u_1w_1+u_2w_2+u_3w_3 &= 0 \quad (1) \\ v_1w_1+v_2w_2+v_3w_3 &= 0 \quad (2) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad w_3 = -\tfrac{u_1w_1+u_2w_2}{u_3} \quad (\text{wenn } u_3 \neq 0)$$

Eingesetzt in (2):

$$\begin{aligned} v_1w_1+v_2w_2-v_3\frac{u_1w_1+u_2w_2}{u_3} &= 0 && | \cdot u_3 \quad (\text{Die Annahme } u_3 \neq 0 \text{ gilt weiterhin}) \\ u_3v_1w_1+u_3v_2w_2-u_1v_3w_1-u_2v_3w_2 &= 0 \\ w_1(u_3v_1-u_1v_3)+w_2(u_3v_2-u_2v_3) &= 0 && | -w_2(u_3v_2-u_2v_3) \\ w_1(u_3v_1-u_1v_3) &= w_2(u_2v_3-u_3v_2) \end{aligned}$$

Es fehlt eine Gleichung, wir können also eine Variable frei wählen. Die obige Gleichung ist trivialerweise wie folgt erfüllt:

$$w_1\underbrace{(u_3v_1-u_1v_3)}_{w_2} = w_2\underbrace{(u_2v_3-u_3v_2)}_{w_1},$$

also

$$w_1 = u_2v_3-u_3v_2 \qquad \text{und} \qquad w_2 = u_3v_1-u_1v_3.$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} w_3 = -\frac{u_1w_1+u_2w_2}{u_3} &= -\frac{1}{u_3}\cdot(u_1(u_2v_3-u_3v_2)+u_2(u_3v_1-u_1v_3)) = \\ -\frac{1}{u_3}\cdot(u_1u_2v_3-u_1u_3v_2+u_2u_3v_1-u_2u_1v_3) &= -\frac{1}{u_3}\cdot(u_2u_3v_1-u_1u_3v_2) = \\ &-(u_2v_1-u_1v_2) = u_1v_2-u_2v_1. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} u_2v_3-u_3v_2 \\ u_3v_1-u_1v_3 \\ u_1v_2-u_2v_1 \end{pmatrix}$$

Das Quadrat der Länge von $\vec{w}$ werden wir auf zwei Arten berechnen: Erstens als $\vec{w}\cdot\vec{w}$ (unten in der Variablen `lw` gespeichert), zweitens als das Quadrat der gewünschten Länge des Vektorprodukts $|\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2\cdot\sin(\sphericalangle(\vec{u},\vec{v}))^2$, unten in der Variablen `vw` gespeichert.
Es gilt $\sin(\alpha)^2 = 1-\cos(\alpha)^2$. Der Cosinus kann mit dem Skalarprodukt berechnet werden.
Die gewünschte Länge ist also

$$|\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2\cdot\left(1-\overbrace{\frac{(\vec{u}\cdot\vec{v})^2}{|\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2}}^{\cos(\sphericalangle(\vec{u},\vec{v}))^2}\right) \overset{|\vec{u}|^2=\vec{u}\cdot\vec{u}}{=} (\vec{u}\cdot\vec{u})\cdot(\vec{v}\cdot\vec{v})-(\vec{u}\cdot\vec{v})^2$$

Auf dem TR kann die Gleichheit der Ausdrücke überprüft werden (ginge auch von Hand):

```
[v1,v2,v3] → v
[u1,u2,u3] → u
[u2·v3-u3·v2, u3·v1-u1·v3, u1·v2 - u2· v1] → w
dotP(w,w) → lw
dotP(u,u)·dotP(v,v) - dotP(u,v)^2 → vw
lw-vw
expand(lw-vw)
```

Wenn der TR Null liefert, haben wir eine Formel zur Berechnung des Vektorprodukts gefunden.
In Maxima (ein freies Computer-Algebra-System) sieht das wie folgt aus:

```
u:matrix([u1,u2,u3]);
v:matrix([v1,v2,v3]);
```