22.8 Modellierung von Vergnügungsbahnen

Ziel ist es, eine oder mehrere Vergnügungsbahnen zu modellieren, wie z.B. jene an der Olma.

Uns interessiert die Parametrierung der Position eines Fahrgastes, d.h. wir suchen Funktionen, die uns für eine gegebene Zeit die Komponenten des Ortsvektors der Fahrgastposition berechnen. Die komponentenweise Ableitung dieses Vektors ergibt die Geschwindigkeit, die zweite Ableitung die Beschleunigung und die dritte Ableitung die Änderung der Beschleunigung, oder was der Fahrgast als «Schütteln» oder «Umhergeworfen werden» wahrnimmt.

Es ist natürlich kaum möglich, diese Funktionen direkt aufzuschreiben. Wir werden daher eine Folge von Koordinatensystemen definieren, so dass die Koordinaten vom Fahrgast im letzten Koordinatensystem trivial sind. Die Abfolge dieser Koordinatensysteme (bzw. Transformationen) ergibt dann die Parametrierung.

Dazu betrachten wir Rotationen und Translationen.

22.8.1 Koordinatentransformationen

Wir starten mit einem statischen Koordinatensystem K_0, typischerweise mit dem Nullpunkt am Boden im Zentrum der zu modellierenden Vergnügungsbahn. Wir notieren

$$K_0 = (\vec{o}_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)\,,$$

wobei $\vec{o}_0 = (0, 0, 0)$ der Ursprung und $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, etc. die Einheitsvektoren sind.

Notationskonventionen $K_0 = (\vec{o}_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ ist jeweils das statische Koordinatensystem. Alle Parameter (Rotationswinkel und Verschiebungsvektoren), die für die Transformation vom Koordinatensytem K_i zum Koordinatensystem K_{i+1} benötigt werden, werden ebenfalls mit $(i + 1)$ indiziert, z.B. α_{i+1} oder $\vec{v}_{i+1}$.

Wir werden alle Winkel in Radianten messen und angeben, nötigenfalls so: $20° \cdot \frac{\pi}{180°}$.

Rotation Wir rotieren jeweils um eine der Koordinatenachsen des **vorhergehenden** Koordinatensystems K_i um einen Winkel α_{i+1}. Die Rotationsachse bleibt dabei fix, die anderen beiden können mit cos und sin berechnet werden. Hier ein Beispiel der Rotation um die z-Achse:

$$\begin{aligned}
\vec{o}_{i+1} &= \vec{o}_i \\
\vec{x}_{i+1} &= \cos(\alpha_{i+1}) \cdot \vec{x}_i + \sin(\alpha_{i+1}) \cdot \vec{y}_i \\
\vec{y}_{i+1} &= \sin(\alpha_{i+1}) \cdot \vec{x}_i - \cos(\alpha_{i+1}) \cdot \vec{y}_i \\
\vec{z}_{i+1} &= \vec{z}_i.
\end{aligned}$$

Translation Bei der Translation um den Vektor $\vec{v}_{i+1}$ bleiben die Einheitsvektoren gleich, es ändert sich nur der Ursprung:

$$\begin{aligned}
\vec{o}_{i+1} &= \vec{o}_i + \vec{v}_{i+1} \\
\vec{x}_{i+1} &= \vec{x}_i \\
\vec{y}_{i+1} &= \vec{y}_i \\
\vec{z}_{i+1} &= \vec{z}_i.
\end{aligned}$$

Die beiden Transformationen können auch in einem Schritt kombiniert werden.

Die Parameter der Transformationen sind z.T. von der Zeit abhängig. Wie z.B. Drehwinkel $\alpha = \omega \cdot t$, wobei ω die Drehgeschwindigkeit in rad/s ist.