e) Gleiche Aufgabe mit $A = (0, 2)$ und $\vec{a} = \binom{2}{1}$ und $B = (5, 0)$ und $\vec{b} = \binom{-1}{1}$ (die Geschwindigkeiten sind nicht mehr gleich und auch nicht $1\,\text{m/s}$).

f) $\star$ Beweisen Sie, dass wenn sich zwei Punkte gleichförmig geradlinig in zu einander rechtwinkligen Richtungen bewegen, entsteht die minimale Distanz immer dort, wo die Verbindung der beiden Punkte mit den Bewegungsrichtungen einen Winkel von 45° bildet.

22.4 Skalarprodukt

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ergibt eine Zahl. Diese Zahl lässt sich auf zwei ganz unterschiedliche Arten berechnen. Meist wird das Skalarprodukt auf die eine Art berechnet und auf die andere Art interpretiert.

Definition 58 Skalarprodukt

Das Skalarprodukt ist wie folgt definiert:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\left(\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})\right),$$

wobei $\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})$ gleich dem Winkel ist, der von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannt wird, wenn man die Vektoren mit Pfeilen mit gleichem Anfangspunkt zeichnet.

Auf einen Beweis der Richtigkeit obiger Gleichung wird hier schweren Herzens verzichtet.

Aufgabe 442
Mit den Definitionen des Skalarprodukts beweisen Sie folgende Eigenschaften:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

b) $\vec{u} \perp \vec{v} \Longrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

c) $(\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$

d) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

e) $\vec{0} \cdot \vec{v} = 0$

f) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} \neq \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$

Das Skalarprodukt hat vor allem drei Anwendungen: Die Berechnung von Winkeln zwischen Vektoren, die Überprüfung ob zwei Vektoren rechtwinklig aufeinanderstehen und die *Projektion* eines Vektors auf einen anderen.

Aufgabe 443 Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$. Mit Hilfe der Definitionen des Skalarprodukts bestimmen Sie eine Formel zur Berechnung des Cosinus des Zwischenwinkels von $\vec{u}$ und $\vec{v}$.

Merke Winkel zwischen Vektoren

$$\cos\left(\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})\right) =$$

Die Arcuscosinus-Funktion liefert Winkel im Bereich $[0°, 180°]$, was genau dem Bereich von Winkeln zwischen zwei Vektoren entspricht.