d) Man sucht ein λ so, dass $\vec{OG}(\lambda) = \vec{OD}$. Wir lösen also die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = (8, -8, 1)\,.$$

Die Gleichung muss für jede Komponente erfüllt sein. Man löst also die erste Gleichung auf und überprüft, ob diese Lösung auch für die weiteren Komponenten gültig ist.

$$\text{Erste Komponente: } 3 - 5\lambda = 8 \quad \Rightarrow \lambda = -1.$$

Eingesetzt in die zweite und dritte Komponente erhalten wir wahre Aussagen. Also $\vec{OG}(-1) = \vec{OD}$ und damit liegt D auf g.

e) In einer Parameterdarstellung wird jeweils das λ-fache des Richtungsvektors addiert. Die Distanz vom Startpunkt der Geraden entspricht also dem λ-fachen der Länge des Richtungsvektors. Wir müssen also einen Richtungsvektor wählen, der die Länge 1 hat, z.B. $\vec{w} = \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{61}} \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$. Der Starpunkt muss B sein. Damit erhalten wir:

$$\vec{OG}(\lambda) = \vec{OB} + \lambda \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \frac{1}{\sqrt{61}} \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

f) Die x-Koordinate ist Null für alle Punkte in der yz-Ebene. Wir suchen also λ so, dass die erste Komponente 0 ist:

$$3 - 5\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{3}{5}$$

Wir setzen ein:

$$\vec{OG}\left(\frac{3}{5}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{5} \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{8}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 441 ex-minimal-distanz-in-der-zeit

Die Bewegungen können mit Geradenparametrisierungen beschrieben werden.

$$\vec{OP_1}(t) = \vec{OA} + t\vec{a} \qquad \vec{OP_2}(t) = \vec{OB} + t\vec{b}$$

c) $d(t) = |\vec{P_1P_2}| = \left|\vec{OB} + t\vec{b} - \left(\vec{OA} + t\vec{a}\right)\right| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3-t \\ t-4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(3-t)^2 + (t-4)^2} = \sqrt{2t^2 - 14t + 25}$

d) Anstatt von $d(t)$ kann auch das Minium von $(d(t))^2)$ bestimmt werden. Da $(d(t))^2 = 2t^2 - 14t + 25$ eine quadratische Funktion ist, kann auch einfach der Scheitelpunkt bestimmt werden (oder Ableiten und Nullsetzen, um die Extremalstelle zu bestimmen).

Scheitelpunkt $t_{opt} = \frac{-b}{2a} = \frac{14}{4} = 3.5$. Oder

$d'(t) = 4t - 14 = 0$ liefert ebenfalls $t_{opt} = 3.5$.

Die minimale Distanz ist also $d(3.5) = \sqrt{0.5} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

e) Lösung mit dem TI-*n*spire:

$$0,2$$

$\rightarrow$ `a`

$$5,0$$

$\rightarrow$ `b`

$$2,1$$