22 Vektoranalysis

Der Begriff «Vektoranalysis» ist etwas hoch gegriffen. Es geht in diesem Kapitel darum, Vergnügungsbahnen, wie sie z.B. an der OLMA zu finden sind, zu modelieren, auf dem Computer in POV-Ray zu animieren und zu analysieren. Dabei geht es insbesondere um die erfahrene Beschleunigung und die Änderungsrate der Beschleunigung, was man als «Wackeln» oder «Schütteln» wahrnehmen würde.

Die mathematischen Grundlagen, die hier vermittelt werden, umfassen die trigonometrischen Funktionen und ihre Ableitungen, Kurvenparametrisierung in der Ebene und im Raum, Begriff der Ableitung einer Position, Geschwindigkeitsvektor und Beschleunigungsvektor. Daneben werden das Skalar- und Vektorprodukt eingeführt.

22.1 Ableitung der trigonometrischen Funktionen

In der Analysis werden wir fortan die **Winkel** immer im **Bogenmass** angeben. Das hat praktische Vorteile, wie gleich ersichtlich sein wird.

Repetition Bogenmass: Das Bogenmass eines Winkels ist die Länge des entsprechenden Bogens auf dem Einheitskreis. D.h. 0° bis 360° entspricht dann dem Bogenmass von 0 bis 2π.

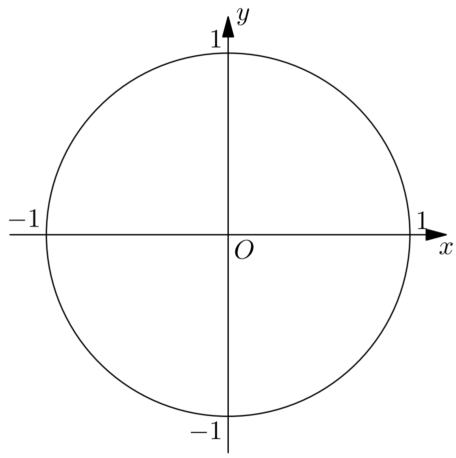
Gradmass	0°	30°		60°			270°	360°
Bogenmass	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$	π		2π

22.1.1 Gleichmässige Kreisbewegung

Wir betrachten einen Punkt P, der eine gleichförmige Kreisbewegung im positivem Umlaufsinn auf dem Einheitskreis mit Geschwindigkeit 1 und Startpunkt $(1, 0)$ (zur Zeit $t = 0$) ausführt.

Aufgabe 430

- Tragen Sie die Zeitpunkte im Einheitskreis (z.B. mit $t = 0$) ein, zu denen sich der Punkt P auf den Achsen befindet.
- Zur Veranschaulichung in der Skizze tragen Sie den Punkt P zur Zeit $t \approx \frac{1}{2}$ ein.
- Zum Zeitpunkt t hat P die Koordinaten $P(t) = (x(t), y(t))$, wobei $x(t)$ und $y(t)$ zwei Funktionen sind. Welche genau? Tragen Sie diese ebenfalls in der Skizze ein.
- Wie lange ist der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t)$?
- Was ist die Beziehung zwischen $\vec{OP}(t)$ und $\vec{v}(t)$?
- Zeichnen Sie $\vec{v}(t)$ ein.
- Tragen Sie die Komponenten von $\vec{v}(t)$ ein.
- In welche Richtung wirkt die Beschleunigung $\vec{a}(t)$?



Die Komponenten von $\vec{v}(t)$ entsprechen den Ableitungen der Koordinaten von $P(t)$.

Merke Ableitung von Cosinus und Sinus

Für x im Bogenmass gilt:

$$(\sin(x))' = \qquad\qquad (\cos(x))' =$$

Aufgabe 431 Wie gross ist die Geschwindigkeit der Kreisbewegung, wenn man den Winkel im Gradmass misst, d.h. eine Umdrehung erst nach $t = 360$ vollendet ist? Was bedeutet das für die Ableitungen von $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ wenn α im Gradmass gemessen wird?

Aufgabe 432 Leiten Sie $\tan(x)$ ab. (x im Bogenmass).

Aufgabe 433 Sei $P(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Bestimmen Sie den Beschleunigungsvektor $\vec{a}(t)$, indem Sie $\vec{OP}(t)$ zwei mal ableiten. Wie gross ist der Betrag der Beschleunigung? Was ist die Richtung von $\vec{a}(t)$ bezüglich $\vec{OP}(t)$?

22.1.2 Koordinatensysteme

Ein kartesisches Koordinatensystem wird wie folgt definiert:

- Festlegen des Ursprungs O (alle Koordinaten Null).
- Festlegen von n paarweise rechtwinkligen Einheitsvektoren (Länge 1) $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, etc.

Für uns ist n jeweils 2 oder 3, gilt aber genauso für höhere Dimensionen.
Wird ein Vektor mit Kompententen geschrieben $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$, bedeutet das $\vec{v} = v_1 \cdot \vec{e}_1 + v_2 \cdot \vec{e}_2$, also eine Summe von Vielfachen der Einheitsvektoren.
Wird ein Punkt mit Koordinaten $P = (x, y)$ geschrieben, heisst das für den Ortsvektor $\vec{OP} = x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2$.
Werden die Einheitsvektoren verändert, ändert sich das ganze Koordinatensystem mit. Damit können z.B. Drehungen oder Streckungen beschrieben werden. Wird der Ursprung verschoben, entspricht das einer Translation.
Ein schöne Anwendung dafür ist die Herleitung der Additionstheoreme.

Aufgabe 434 Gesucht sind Formeln für $\cos(\alpha + \beta)$ und $\sin(\alpha + \beta)$, die nur α oder β alleine in den trigonometrischen Funktionen enthalten. Vorgehen:

- Zeichnen Sie den Einheitskreisviertel für positive x- und y-Koordinaten mit der Einheit 8 cm.
- Zeichnen Sie die Punkte P_α und $P_{\alpha+\beta}$ auf dem Einheitskreis ein, für $\alpha \approx 20°$ und $\beta \approx 40°$.
- Notieren Sie die allgemeinen Koordinaten von P_α in der Skizze (nicht spezifisch für 20°).
- Geben Sie die Komponenten von $\vec{f}_1 = \vec{OP}_\alpha$ an.
- Zeichnen Sie $\vec{f}_2$ mit Länge 1 rechtwinklig zu $\vec{f}_1$ ein, so dass der Drehsinn von $\vec{f}_1$ zu $\vec{f}_2$ positiv ist.
- Geben Sie die Komponenten von $\vec{f}_2$ an.
- Seien $\vec{f}_1$ und $\vec{f}_2$ neue Einheitsvektoren. Was sind die Koordinaten von $P_{\alpha+\beta}$ in diesem neuen Koordinatensystem?
- Schreiben Sie $\vec{OP}_{\alpha+\beta}$ als Summe von Vielfachen von $\vec{f}_1$ und $\vec{f}_2$.
- Drücken Sie damit die Koordinaten von $P_{\alpha+\beta}$ im alten Koordinatensystem aus, indem Sie die Komponenten von $\vec{f}_1$ und $\vec{f}_2$ einsetzen. Fassen Sie zusammen und und lesen Sie die Additionsformeln ab.

Merke Additionstheoreme

$$\sin(\alpha + \beta) =$$
$$\cos(\alpha + \beta) =$$

Aufgabe 435 Mit Hilfe der Definition im Einheitskreis, drücken Sie erst $\sin(-\alpha)$ und $\cos(-\alpha)$ mit $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ aus. Leiten Sie dann damit die Additionstheoreme für $\sin(\alpha - \beta)$ und $\cos(\alpha - \beta)$ her, indem Sie $(\alpha - \beta)$ als $(\alpha + (-\beta))$ schreiben.

Aufgabe 436 Mit Hilfe der Additionstheoreme für Sinus und Cosinus, leiten Sie das Additionstheorem für den Tangens her.

22.2 Repetition Vektoren

Ein Vektor hat eine **Richtung** und eine **Länge**. Dargestellt wird ein Vektor **grafisch** als **Pfeil**, wobei es nicht relevant ist, wo der Anfangspunkt vom Pfeil liegt. *Ein Vektor kann also durch unendlich viele parallele, gleich lange Pfeile dargestellt werden.* **Algebraisch** wird ein Vektor üblicherweise mit **Komponenten** dargestellt, eine pro Koordinatenrichtung. Die Komponenten geben die **Vielfachen** der **Einheitsvektoren** an, die addiert den Vektor ergeben. Z.B.

$$\begin{pmatrix}3\\-2\\\sqrt{2}\end{pmatrix} = 3\vec{e}_1 + (-2)\vec{e}_2 + \sqrt{2}\vec{e}_3 = 3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \sqrt{2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

Vektoren werden komponentenweise addiert.

Merke Vektoren auf dem TI-*n*spire

Auf dem TI-*n*spire können Vektoren wie folgt definiert werden:
`[3,-2,`$\sqrt{2}$`]` $\rightarrow$ `v`
Mit Vektoren ist auch die Addition und Multiplikation mit Zahlen definiert.

Aufgabe 437 Mit dem TI-*n*spire bilden Sie alle möglichen Summen von: $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-4\end{pmatrix}$.

Vektoren können mit einer reellen Zahl multipliziert werden. Man nennt dies auch **skalieren**. Dabei werden alle Komponenten mit dieser Zahl multipliziert. Die Richtung bleibt erhalten.

Aufgabe 438 Berechnen Sie: a) $3 \cdot \begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}$ b) $-2 \cdot \begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$ c) $-\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}6\\-4\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

Merke Länge eines Vektors

Die Länge eines Vektors kann mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnet werden:

$$|\vec{v}| = \left|\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Auf dem TI-*n*spire kann die Länge eines Vektors mit der `norm()`-Funktion berechnet werden, z.B. mit `norm(v)` oder `norm([2,3,7])`. Zu finden mit `menu 7 7 1`.

Insbesondere gilt, dass $|k \cdot \vec{v}| = |k| \cdot |\vec{v}|$. D.h. wird ein Vektor mit einer Zahl $k \in \mathbb{R}$ multiplizert, ändert sich die Länge entsprechend (mit dem Betrag von k).

Aufgabe 439 Skalieren Sie die Vektoren so, dass sie die gegebene Länge erreichen:
a) $\vec{a} = \begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}$, Länge 6 b) $\vec{b} = \begin{pmatrix}3\\-6\\-2\end{pmatrix}$, Länge 1 c) $\vec{c} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, Länge 1.

Merke Ortsvektor

Der Ortsvektor $\vec{OP}$ eines Punktes P ist der Vektor vom Ursprung O zum Punkt P. Der Ortsvektor von P hat die gleichen Komponenten wie der Punkt P Koordinaten hat.

Merke Vektor zwischen zwei Punkten

Den Vektor vom Anfangspunkt $A = (a_1, a_2, a_3)$ zum Endpunkt $B = (b_1, b_2, b_3)$ erhält man, indem man von den Koordinaten vom Endpunkt B die Koordinaten vom Anfangspunkt A subtrahiert.
Kurz: **Endpunkt minus Anfangspunkt**.

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

22.3 Geraden im Raum

Eine Gerade g im Raum kann als eindimensionales Koordinatensystem aufgefasst werden. Man benötigt also einen Ursprung (Startpunkt) und einen Richtungsvektor (quasi der Einheitsvektor), der die Richtung vorgibt. Damit wird jedem Punkt von g eine reelle Zahl zugeordnet und umgekehrt. Diese Zahl wird meistens mit λ oder t notiert. Wir werden λ verwenden, da in POV-Ray die Variable `t` schon definiert ist.

Merke Parameterdarstellung einer Geraden

Die Ortsvektoren der Punkte einer Geraden g im Raum können wie folgt beschrieben werden:

$$\vec{OG}(\lambda) = \vec{OA} + \lambda \vec{v},$$

wobei A ein *beliebiger* Punkt auf g und $\vec{v}$ ein *beliebiger* **Richtungsvektor** parallel zu g ist.

Für eine Gerade gibt es also unendlich viele Parameterdarstellungen.

Aufgabe 440

a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung (d.h. bestimmen Sie den Ortsvektor eines Startpunktes und einen Richtungsvektor) für die Gerade g durch die Punkte $A = (3, -2, 1)$ und $B = (-2, 4, 1)$.

b) Was ist an der Lage der Geraden g speziell?

c) Liegt der Punkt $C = (0, 1, 2)$ auf g?

d) Liegt der Punkt $D = (8, -8, 1)$ auf g?

e) Bestimmen Sie eine neue Parameterdarstellung von g so, dass der Betrag des Parameters der Distanz zwischen dem parametrierten Punkt und dem Punkt B entspricht.

f) In welchem Punkt schneidet die Gerade g die yz-Ebene? *Was ist an den Koordinaten der Punkte in der yz-Ebene speziell?*

g) ⋆ Wo schneidet g die Kugel mit Zentrum $O = (0, 0, 0)$ und Radius 10?
Hinweis: Welche Punkte auf g haben eine Distanz von 10 vom Ursprung?

22.3.1 Japanische Marschtruppe

Dieser Abschnitt bezieht sich auf einen Ausschnitt aus einem Video, das eine japanische Marschtruppe zeigt.

Ziel ist es, zwei in einem Raster angeordnete Gruppen rechtwinklig so aufeinander zulaufen zu lassen, dass sich die Gruppen kollisionsfrei «durchdringen».

Dazu folgt eine Reihe von Aufgaben, um das Problem zu erfassen und zu modellieren. Die einzelnen Schritte werden jeweils mit POV-Ray animiert.

Aufgabe 441 Zwei Personen bewegen sich von je einem Startpunkt in je eine Richtung mit der Geschwindigkeit 1 m/s. Die erste Person startet in $A = (0, 4)$ in die Richtung $\vec{a} = \binom{1}{0}$ und die zweite Person im Punkt $B = (3, 0)$ in die Richtung $\vec{b} = \binom{0}{1}$. Die Koordinateneinheit sei 1 m.

a) Skizzieren Sie die Situation zu den ganzzahligen Zeitpunkten $0 \leq t \leq 5$.

b) Schätzen Sie die kleinste Distanz der beiden Personen.

c) Berechnen Sie die Distanz der beiden Personen in Abhängigkeit der Zeit t (das Resultat ist eine Funktion von t).

d) Bestimmen Sie die Extremalstelle der Distanzfunktion.

e) Lösen Sie folgende verallgemeinerte Variante mit dem TR mit $A = (0, 2)$ und $\vec{a} = \binom{2}{1}$ und $B = (5, 0)$ und $\vec{b} = \binom{-1}{1}$.

f) Animieren Sie die Situation mit POV-Ray.

Aufgabe 442 Die Marschtruppe steht in einem quadratischen Raster. Die Anzahl Personen soll immer eine ungerade Quadratzahl sein, damit es eine Person im Mittelpunkt gibt. Die Koordinaten dieser mittleren Person bestimmen die Position der ganzen Truppe.
Beschrieben wird die Anzahl Personen mit $(2n + 1)^2$, wobei $n \in \mathbb{N}$.
Der Abstand d zwischen den Personen soll 2 m betragen.
Die Marschgeschwindigkeit soll 1 m/s betragen.

a) Wie gross ist das Raster in Abhängigkeit von n?

b) Die Wege der beiden mittleren Personen schneiden sich in einem Punkte S. Wenn eine der mittleren Personen in S ist, wie weit davon entfern muss die andere mittlere Person sein, damit sich die Gruppen «schön» durchdringen?

c) Bestimmen Sie eine geeignete Startpositionen (beide Gruppen noch getrennt) auf den Koordinatenachsen für die zwei Marschtruppen, in Abhängigkeit von n. Man nimmt an, dass die Gruppen achsenparallel marschieren.

d) Bestimmen Sie eine geeignete Zeitdauer (bis beide Gruppen wieder getrennt sind) für die Animiation, in Abhängigkeit von n.

e) Programmieren Sie die Situation in POV-Ray.

22.4 Skalarprodukt

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ergibt eine Zahl. Diese Zahl lässt sich auf zwei ganz unterschiedliche Arten berechnen. Meist wird das Skalarprodukt auf die eine Art berechnet und auf die andere Art interpretiert.

Definition 58 Skalarprodukt

Das Skalarprodukt ist wie folgt definiert:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\left(\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})\right),$$

wobei $\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})$ gleich dem Winkel ist, der von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannt wird, wenn man die Vektoren mit Pfeilen mit gleichem Anfangspunkt zeichnet.
Auf dem TR kann mit `dotP(u,v)` das Skalarprodukt berechnet werden. Zu finden mit «menu 7 C 3».

Auf einen Beweis der Richtigkeit obiger Gleichung wird hier schweren Herzens verzichtet.

Aufgabe 443 Berechnen Sie folgende Skalarprodukte:

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 444
Mit den Definitionen des Skalarprodukts beweisen Sie folgende Eigenschaften:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

b) $\vec{u} \perp \vec{v} \Longrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

c) $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$

d) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

e) $\vec{0} \cdot \vec{v} = 0$

f) $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2$

g) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} \neq \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$

Das Skalarprodukt hat vor allem drei Anwendungen: Die Berechnung von Winkeln zwischen Vektoren, die Überprüfung ob zwei Vektoren rechtwinklig aufeinanderstehen und die *Projektion* eines Vektors auf einen anderen.

Aufgabe 445 Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$. Mit Hilfe der Definitionen des Skalarprodukts bestimmen Sie eine Formel zur Berechnung des Cosinus des Zwischenwinkels von $\vec{u}$ und $\vec{v}$.

Merke Winkel zwischen Vektoren

$$\cos\left(\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})\right) =$$

Die Arcuscosinus-Funktion liefert Winkel im Bereich $[0°, 180°]$, was genau dem Bereich von Winkeln zwischen zwei Vektoren entspricht.

Aufgabe 446 Berechnen Sie mit dem TR die Winkel im $\triangle ABC$ mit $A = (2, -4, 1)$, $B = (-2, -1, 4)$ und $C = (0, 7, -2)$.

22.4.1 Neue TR-Funktion für die Winkelberechnung

Die Berechnung von Winkeln zwischen Vektoren ist eine häufige Operation. Wir werden deshalb den TR um diese Funktion «aufrüsten»:

- Neues Dokument anlegen: «home/on 1» und einen Calculator hinzufügen.
- Dokument speichern unter: «doc 1 5», dort in den Ordner «MyLib» das Dokument unter dem Namen «vec» speichern. *MyLib befindet sich eventuell im übergeordneten Ordner.*
- Programmeditor öffnen und neue Funktion anlegen: «menu 9 1 1», Name: «vangle», Typ: «Funktion», Bibliothekszugriff: «LibPub».
- Das Programm wie folgt vervollständigen:

```
Define LibPub vangle(u,v)=
Func
    return cos⁻¹(dotP(u,v)/norm(u)/norm(v))
EndFunc
```

- Funktion speichern mit «menu 2 1».
- Dokument speichern mit «doc 1 4».
- In den Calculator gehen mit «home/on Calculator» und dort mit «menu 1 7 1» die Bibliotheken aktualisieren.
- Ausprobieren mit «Catalog 6», dort «vec» öffnen und die «vangle»-Funktion auswählen.

22.5 Rosetta Stone

Deutsch	**Algebra**	**Grafik**	TI-*n*spire	**POV-Ray**
Vektor	$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$		`[3,-2,7]` → `a`	`#declare a=<3,-2,7>;`
Vektoraddition	$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$		`a+b` → `c`	`#declare c=a+b;`
Multiplikation mit Zahl	$\vec{b} = k \cdot \vec{a},\ k \in \mathbb{R}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \\ k \cdot a_3 \end{pmatrix}$		`k*a` → `b`	`#declare b=k*a;`
Länge eines Vektors	$r = \lvert\vec{a}\rvert$ $r = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$		`norm(a)` → `r` «menu 7 7 1»	`#declare r=vlength(a);`
Einheitsvektor	$\vec{b} = \frac{1}{\lvert\vec{a}\rvert}\vec{a}$		`unitV(v)` → `b` «menu 7 C 1»	`#declare b=vnormalize(a);`
Skalarprodukt «a skalar b»	$k = \vec{a} \cdot \vec{b},\ k \in \mathbb{R}$ $k = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cdot \cos\left(\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})\right)$ $k = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i$		`dotP(a,b)` → `k` «menu 7 C 3»	`#declare k=vdot(a,b);`
Vektorprodukt «a kreuz b»	$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$ $\lvert\vec{c}\rvert = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cdot \sin\left(\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})\right)$ $\vec{c} \cdot \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{b} = 0$ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden ein Rechtssystem.		`crossP(a,b)` → `l` «menu 7 C 2»	`#declare c=vcross(a,b);`

22.6 Vektorprodukt

Definition 59 Vektorprodukt

Das **Vektorprodukt** (auch **Kreuzprodukt**) zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ liefert einen Vektor

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \qquad \text{(gelesen «a kreuz b» oder «a vektoriell b»)},$$

der **rechtwinklig** auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht, so dass $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ in dieser Reihenfolge ein **Rechtssystem** bilden (d.h. orientiert wie die x-, y- und z-Achse, oder wie wie Daumen, Zeigefinger, Mittelfinger der **rechten Hand**) und die **Länge** von $\vec{c}$ entspricht der Fläche vom durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ **aufgespannten Parallelogramms**.
Die entsprechende TR-Funktion heisst `crossP`, zu finden mit `menu 7 C 2`.

Aufgabe 447 Gegeben sind die beiden Seitenlängen a und d eines Paralellogramms sowie der eingeschlossene Winkel α. Finden Sie eine Formel zur Berechnung der Parallelogrammfläche aus diesen Grössen.

Merke Länge des Vektorpodukts

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin(\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}))$$

Sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ orthogonal, ist der Sinus 1 und damit ist die Länge gleich dem Produkt der Längen.
Für die Winkelberechnung ist das Vektorprodukt ungeeignet, da der Sinus auf dem Intervall $[0°, 180°]$ nicht eindeutig umkehrbar ist.

Aufgabe 448 Von einem Würfel $ABCDEFGH$ sind 3 Punkte gegeben. Die Punkte $ABCD$ und $EFGH$ bilden jeweils übereinander liegende Quadrate mit gleichem Umlaufsinn (z.B. sind die Punkte A und E benachbart). Die Vektoren $\vec{AB}$, $\vec{AD}$, $\vec{AE}$ bilden ein Rechtssystem.
Machen Sie eine saubere Skizze.
Überprüfen Sie erst, dass die gegebenen Punkte überhaupt die gewünschten Punkte eines Würfels sein können.
Berechnen Sie dann die Ortsvektoren oder Koordinaten der restlichen Punkte.

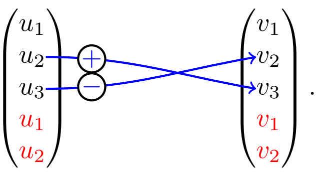
a) $A = (1, 2, 3)$, $B = (-3, 3, -5)$, $D = (-3, -6, 4)$. b) $A = (-3, 4, 5)$, $D = (9, 25, 21)$, $F = (10, -24, 32)$

Aufgabe 449 Leiten Sie die Berechnungsformel für das Vektorprodukt $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ her.
Aus den Bedingungen, dass $\vec{w}$ sowohl auf $\vec{u}$ wie auch auf $\vec{v}$ rechtwinklig steht, stellen Sie zwei Gleichungen für die Komponenten von $\vec{w}$ auf, eliminieren Sie w_3 und wählen Sie eine «einfache» Lösung für w_1 und w_2. Zeigen Sie dann, dass Ihre Formel einen Vektor der gewünschten Länge liefert.

Merke Vektorprodukt

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$$

Diese Formel kann man sich mit Eselsbrücken relativ einfach merken. Entweder man merkt sich die erste Komponente und erhöht dann die Indizes jeweils um 1, wobei 4 durch 1 ersetzt wird.
Oder man merkt sich folgendes Schema, das dann schrittweise nach unten verschoben wird:



Aufgabe 450 Berechnen Sie von Hand, und überprüfen Sie dann mit dem TR:

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 451 Wahr oder falsch? Begründen Sie! Wenn die Aussage falsch ist, korrigieren Sie diese, falls möglich.

a) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$

b) $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$

c) $\vec{a} \times \vec{a} = 0$

d) $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 90° \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

e) Die Fläche vom $\triangle ABC$ ist gleich $F = |\vec{AB} \times \vec{AC}|$

f) Liegt der Punkt D in der gleichen Ebene wie die Punkte A, B, C, dann ist $(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot (\vec{AB} \times \vec{AD}) = 0$

22.7 Repetitionsaufgaben

Aufgabe 452
Gegeben sind 3 Punkte, $A = (5, 4, -3)$, $B = (4, 3, -7)$ und $C = (5, -2, 3)$. Berechnen Sie, einmal von Hand, einmal mit dem TR:

a) Die Seitenlängen $c = \overline{AB}$ und $b = \overline{AC}$.

b) Den Winkel $\alpha = \sphericalangle(CAB)$.

c) Ist ABC rechtwinklig?

d) Die Fläche $\triangle ABC$ (als halbe Parallelogrammfläche).

e) Die Koordinaten vom Punkt M_{BC}.

f) Die Koordinaten vom Punkt S mit $\vec{OS} = \frac{1}{3} \cdot \left(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}\right)$.

g) Eine Parameterdarstellung der Geraden g durch die Punkte A und M_{BC}.

h) Zeigen Sie, dass der Punkt S auf der Geraden AM_{BC} liegt. *Bonus: Zeigen Sie, dass das für beliebige Dreiecke gilt).*

Aufgabe 453
Von einem Würfel $ABCDEFGH$ sind die Punkte $B = (9, -1, -2)$, $F = (5, -5, 5)$ und $E = (-3, -4, 1)$ gegeben. Die Punkte $ABCD$ und $EFGH$ bilden jeweils übereinander liegende Quadrate mit gleichem Umlaufsinn (z.B. sind die Punkte A und E benachbart). Die Vektoren $\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE}$ bilden ein Rechtssystem.
Machen Sie eine saubere Skizze und berechnen Sie die fehlenden Punkte.

Aufgabe 454
Ein Gleitschirmpilot startet zur Zeit $t = 0$ im Punkt $A = (-2500, 1000, 1000)$ und fliegt nur gerade aus. Nach 1 min befindet er sich im Punkt $B = (-1960, 1360, 880)$. Die Koordinateneinheit ist 1 m, die z-Achse ist nach oben orientiert.

a) Beschreiben Sie seine Flugbahn mit einer Parameterdarstellung und zwar so, dass der Parameter der Zeit in Sekunden entspricht.

b) Wie gross ist seine schräge Geschwindigkeit in m/s?

c) Wie gross ist seine Geschwindigkeit über Boden in m/s?

d) Wie lange dauert es (in Minuten und Sekunden), bis er bei $z = 0$ ankommt und landet?

e) Was sind die x- und y-Koordinaten des Landepunktes?

f) Im Punkt $O = (0, 0, 0)$ befindet sich eine Helikopterbasis. Zu dieser muss ein Mindestabstand von 2.5 km eingehalten werden (kugelförmiger Luftraum). Verletzt der Pilot diesen Luftraum auf seinem Flug?

22.8 Modellierung von Vergnügungsbahnen

Ziel ist es, eine oder mehrere Vergnügungsbahnen zu modellieren, wie z.B. jene an der Olma.

Uns interessiert die Parametrierung der Position eines Fahrgastes, d.h. wir suchen Funktionen, die uns für eine gegebene Zeit die Komponenten des Ortsvektors der Fahrgastposition berechnen. Die komponentenweise Ableitung dieses Vektors ergibt die Geschwindigkeit, die zweite Ableitung die Beschleunigung und die dritte Ableitung die Änderung der Beschleunigung, oder was der Fahrgast als «Schütteln» oder «Umhergeworfen werden» wahrnimmt.

Es ist natürlich kaum möglich, diese Funktionen direkt aufzuschreiben. Wir werden daher eine Folge von Koordinatensystemen definieren, so dass die Koordinaten vom Fahrgast im letzten Koordinatensystem trivial sind. Die Abfolge dieser Koordinatensysteme (bzw. Transformationen) ergibt dann die Parametrierung.

Dazu betrachten wir Rotationen und Translationen.

22.8.1 Koordinatentransformationen

Wir starten mit einem statischen Koordinatensystem K_0, typischerweise mit dem Nullpunkt am Boden im Zentrum der zu modellierenden Vergnügungsbahn. Wir notieren

$$K_0 = (\vec{o}_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)\,,$$

wobei $\vec{o}_0 = (0, 0, 0)$ der Ursprung und $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, etc. die Einheitsvektoren sind.

Notationskonventionen $K_0 = (\vec{o}_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ ist jeweils das statische Koordinatensystem. Alle Parameter (Rotationswinkel und Verschiebungsvektoren), die für die Transformation vom Koordinatensytem K_i zum Koordinatensystem K_{i+1} benötigt werden, werden ebenfalls mit $(i + 1)$ indiziert, z.B. α_{i+1} oder $\vec{v}_{i+1}$.

Wir werden alle Winkel in Radianten messen und angeben, nötigenfalls so: $20° \cdot \frac{\pi}{180°}$.

Rotation Wir rotieren jeweils um eine der Koordinatenachsen des **vorhergehenden** Koordinatensystems K_i um einen Winkel α_{i+1}. Die Rotationsachse bleibt dabei fix, die anderen beiden können mit cos und sin berechnet werden. Hier ein Beispiel der Rotation um die z-Achse:

$$\begin{aligned}
\vec{o}_{i+1} &= \vec{o}_i\\
\vec{x}_{i+1} &= \cos(\alpha_{i+1}) \cdot \vec{x}_i + \sin(\alpha_{i+1}) \cdot \vec{y}_i\\
\vec{y}_{i+1} &= \sin(\alpha_{i+1}) \cdot \vec{x}_i - \cos(\alpha_{i+1}) \cdot \vec{y}_i\\
\vec{z}_{i+1} &= \vec{z}_i.
\end{aligned}$$

Translation Bei der Translation um den Vektor $\vec{v}_{i+1}$ bleiben die Einheitsvektoren gleich, es ändert sich nur der Ursprung:

$$\begin{aligned}
\vec{o}_{i+1} &= \vec{o}_i + \vec{v}_{i+1}\\
\vec{x}_{i+1} &= \vec{x}_i\\
\vec{y}_{i+1} &= \vec{y}_i\\
\vec{z}_{i+1} &= \vec{z}_i.
\end{aligned}$$

Die beiden Transformationen können auch in einem Schritt kombiniert werden.

Die Parameter der Transformationen sind z.T. von der Zeit abhängig. Wie z.B. Drehwinkel $\alpha = \omega \cdot t$, wobei ω die Drehgeschwindigkeit in rad/s ist.

22.9 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe 431 ex-im-gradmass-ableiten

Der Betrag der Geschwindkeit (d.h. Länge des Geschwindigkeitsvektors) ist nicht mehr 1 sondern $\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$. Für die Ableitungungen heisst das

$$\begin{aligned} \sin(\alpha)' &= \frac{\pi}{180} \cdot \cos(\alpha) \qquad \text{und} \\ \cos(\alpha)' &= -\frac{\pi}{180} \cdot \sin(\alpha). \end{aligned}$$

Darum ist das Bogenmass so viel eleganter.

Lösung zu Aufgabe 432 ex-tangens-ableiten

Für $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$(\tan(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) + \sin(x)\sin(x)}{(\cos(x))^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}$$

Lösung zu Aufgabe 433 ex-beschleunigung-im-einheitskreis

$\vec{v}(t) = \left(\vec{OP}(t)\right)' = ((\cos(x))', (\sin(x))') = (-\sin(x), \cos(x))$.

$\vec{a}(t) = (\vec{v}(t))' = ((-\sin(x))', (\cos(x))') = (-\cos(x), -\sin(x)) = -\vec{OP}(t)$

Der Betrag (Länge) der Beschleunigung ist ebenfalls 1. Die Richtung ist entgegengesetzt der Richtung von $\vec{OP}$.

Lösung zu Aufgabe 434 ex-additionstheoreme-herleiten

Koordinaten von $P_\alpha = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$.

$\vec{f_1} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\ \sin(\alpha)\end{pmatrix}$, $\vec{f_2} = \begin{pmatrix}-\sin(\alpha)\\ \cos(\alpha)\end{pmatrix}$.

Koordinaten im neuen Koordinatensystem: $P_{\alpha+\beta} = (\cos(\beta), \sin(\beta))$.

Also $\vec{OP}_{\alpha+\beta} = \cos(\beta)\vec{f_1} + \sin(\beta)\vec{f_2}$.

Komponenten im alten Koordinatensystem:

$\vec{OP}_{\alpha+\beta} = \cos(\beta)\cdot\begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\ \sin(\alpha)\end{pmatrix} + \sin(\beta)\cdot\begin{pmatrix}-\sin(\alpha)\\ \cos(\alpha)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\beta)\cdot\cos(\alpha) - \sin(\beta)\cdot\sin(\alpha)\\ \cos(\beta)\cdot\sin(\alpha) + \sin(\beta)\cdot\cos(\alpha)\end{pmatrix}$

Es gilt natürlich auch: $\vec{OP}_{\alpha+\beta} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta)\end{pmatrix}$

Daraus liest man ab:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 435 ex-additionstheoreme-minus

Ersetzt man α durch $-\alpha$ hat das eine Spiegelung an der x-Achse zur Folge. Damit ändert sich das Vorzeichen der y-Koordinate, also des Sinuswerts. Die x-Koordinate bleibt unverändert, also

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \qquad \text{und} \qquad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

Und damit

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\sin(\beta)\\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 436 ex-additionstheorem-tangens

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)}=$$

$$\frac{\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)}\cdot\frac{\frac{1}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}{\frac{1}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}=\frac{\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}+\frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}}{1+\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\cdot\frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}}=\frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

Lösung zu Aufgabe 437 ex-vektoraddition

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	$\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}$
$\vec{b}$		$\begin{pmatrix}-6\\4\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}$
$\vec{c}$			$\begin{pmatrix}2\\-2\\-8\end{pmatrix}$

und $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$.

Lösung zu Aufgabe 438 ex-vektoren-skalieren

a) $\begin{pmatrix}-3\\6\\-9\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}-6\\0\\2\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}-3\\2\\-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$

Lösung zu Aufgabe 439 ex-vektoren-auf-laenge-skalieren

a) $|\vec{a}|=3$, also muss mit $\lambda=2$ multipliziert werden, um die Länge 6 zu erhalten: $2\vec{a}=\begin{pmatrix}-4\\4\\-2\end{pmatrix}$. Es könnte auch mit $\lambda=-2$ multipliziert werden. Allerdings wird dann die Richtung umgekehrt, was in den meisten Fällen unerwünscht ist.

b) $|\vec{b}|=7$, also muss durch 7 dividiert werden: $\frac{1}{7}\vec{b}=\begin{pmatrix}3/7\\-6/7\\-2/7\end{pmatrix}$.

c) Um die Länge 1 zu erhalten, wird der Vektor durch seine eigene Länge dividiert: $\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

Lösung zu Aufgabe 440 ex-geraden-aufgaben

a) Richtungsvektor $\vec{v}=\vec{AB}=\begin{pmatrix}-5\\6\\0\end{pmatrix}$, Startpunkt A. $\vec{OG}(\lambda)=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-5\\6\\0\end{pmatrix}$.

b) Am Richtungsvektor liest man ab, dass sich die z-Koordinate nie ändert, d.h. die Gerade ist parallel zur xy-Ebene.

c) Der Punkt C kann nicht auf g liegen, weil die z-Koordinate nicht 1 ist.

d) Man sucht ein λ so, dass $\vec{OG}(\lambda) = \vec{OD}$. Wir lösen also die Gleichung

$$\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-5\\6\\0\end{pmatrix} = (8,-8,1)\,.$$

Die Gleichung muss für jede Komponente erfüllt sein. Man löst also die erste Gleichung auf und überprüft, ob diese Lösung auch für die weiteren Komponenten gültig ist.

$$\text{Erste Komponente: } 3-5\lambda = 8 \quad \Rightarrow \lambda = -1.$$

Eingesetzt in die zweite und dritte Komponente erhalten wir wahre Aussagen. Also $\vec{OG}(-1) = \vec{OD}$ und damit liegt D auf g.

e) In einer Parameterdarstellung wird jeweils das λ-fache des Richtungsvektors addiert. Die Distanz vom Startpunkt der Geraden entspricht also dem λ-fachen der Länge des Richtungsvektors. Wir müssen also einen Richtungsvektor wählen, der die Länge 1 hat, z.B. $\vec{w} = \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{61}}\begin{pmatrix}-5\\6\\0\end{pmatrix}$. Der Starpunkt muss B sein. Damit erhalten wir:

$$\vec{OG}(\lambda) = \vec{OB} + \lambda\frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v} = \begin{pmatrix}-2\\4\\1\end{pmatrix} + \lambda\frac{1}{\sqrt{61}}\begin{pmatrix}-5\\6\\0\end{pmatrix}$$

f) Die x-Koordinate ist Null für alle Punkte in der yz-Ebene. Wir suchen also λ so, dass die erste Komponente 0 ist:

$$3-5\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{3}{5}$$

Wir setzen ein:

$$\vec{OG}\left(\frac{3}{5}\right) = \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} + \frac{3}{5}\begin{pmatrix}-5\\6\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\\frac{8}{5}\\1\end{pmatrix}$$

g) Wir suchen λ so, dass $|\vec{OG}(\lambda)| = 10$. Diese Gleichung kann nach λ aufgelöst werden. Mit dem TR kann diese Gleichung wie folgt lösen:

`[3,-2,1]+l*[-6,5,0]` $\rightarrow$ `g(l)` *Parameterdarstellung als Funktion*
`zeros(norm(g(l)-10, l))` $\rightarrow$ `ls` *Gleichung lösen.*
`g(ls[1])` *1. Gesuchter Punkt, mit erstem Element der Liste der Lösungen*
`g(ls[2])` *2. Gesuchter Punkt*

Hinweis: Zeros liefert eine Liste von Werten. Leider können Listen nicht mit Vektoren verrechnet werden. Darum werden die beiden Punkte einzeln berechnet mit Zugriff auf das erste und zweite Element der Liste (`ls[1]` und `ls[2]`).

Man erhält für λ zwei Werte: $\lambda_1 = \frac{5\sqrt{239}-27}{61}$ und $\lambda_2 = \frac{5\sqrt{239}+27}{61}$, oder ungefähr $\lambda_1 \approx -0.8246$ und $\lambda_2 \approx 1.710$.

Eingesetzt in die Parameterdarstellung erhält man die Punkte $P_1 \approx (7.123, -6.947, 1)$ und $P_2 \approx (-5.549, 8.259, 1)$.

Lösung zu Aufgabe 441 ex-minimal-distanz-in-der-zeit

Die Bewegungen können mit Geradenparametrisierungen beschrieben werden.

$$\vec{OP_1}(t) = \vec{OA} + t\vec{a} \qquad \vec{OP_2}(t) = \vec{OB} + t\vec{b}$$

c) $d(t) = |\vec{P_1P_2}| = \left|\vec{OB} + t\vec{b} - \left(\vec{OA} + t\vec{a}\right)\right| = \left|\begin{pmatrix}3\\t\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}t\\4\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}3-t\\t-4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(3-t)^2+(t-4)^2} = \sqrt{2t^2-14t+25}$

d) Anstatt von $d(t)$ kann auch das Minium von $(d(t))^2)$ bestimmt werden. Da $(d(t))^2 = 2t^2-14t+25$ eine quadratische Funktion ist, kann auch einfach der Scheitelpunkt bestimmt werden (oder Ableiten und Nullsetzen, um die Extremalstelle zu bestimmen).

Scheitelpunkt $t_{opt} = \frac{-b}{2a} = \frac{14}{4} = 3.5$. Oder
$d'(t) = 4t - 14 = 0$ liefert ebenfalls $t_{opt} = 3.5$.
Die minimale Distanz ist also $d(3.5) = \sqrt{0.5} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
e) Lösung mit dem TI-*n*spire:

```
[0,2] → a
[5,0] → b
[2,1] → va
[-1,1] → vb
norm(b+t*vb-(a+t*va)) → d(t)        Distanzfunktion
zeros(d/dt(d(t)),t)[1] → to        Erstes Element aus Lösungsliste speichern
d(to) → mind        minimale Distanz
```

Die zeros-Funktion liefert eine Liste, hier nur mit einem Element (Minimum einer Quadratischen Funktion). Weil Listen und Vektoren nicht miteinander verrechnet werden können, wird direkt aus der Liste das erte (und hier einzige) Element extrahiert. In to (o für optimal) wird hier $\frac{5}{3}$ gespeichert, die minimale Distanz (gespeichert in mind, für minimale Distanz) ist 2.

Lösung zu Aufgabe 442 ex-raster-der-marschtruppe

Hinweis: Für die Aufgaben c) & d) gibt es keine eindeutig richtige Lösung. Man könnte diese auch durch «probieren, bis es gut aussieht» bestimmen. Es lohnt sich aber, diese Grössen vorher sinnvoll zu berechnen.

a) Das Raster hat eine Grösse von $(2n + 1) \cdot d$.

b) Der Abstand muss genau $\frac{1}{2}d$ sein. So kreuzen sich die Personen immer genau zwischen zwei anderen Personen.

c) Der Abstand von Nullpunkt muss mindestens die Grösse des Rasters plus die halbe Grösse des Rasters sein, also mindestens $\frac{3}{2} \cdot (2n+1) \cdot d$. Zum Beispiel $(3n+2) \cdot d$. Die Differenz der Wege zum Kreuzungspunkt muss $\frac{1}{2}d$ betragen. Damit erhält man z.B. $\vec{OA} = (3n + 2) \cdot d \cdot \vec{e}_1$ und $\vec{OB} = (3n + 2.5) \cdot d \cdot \vec{e}_2$.

d) Damit die Gruppen wieder getrennt sind, sollte also das doppelte der Zeit animiert werden, wie die Gruppe mit dem längeren Weg zum Kreuzungspunkt braucht. Also hier in unserem Fall $2 \cdot (3n+2.5) \cdot d = (6n+3) \cdot d$ Sekunden.

Lösung zu Aufgabe 443 ex-skalarprodukt-ausrechnen

a) -6+(-2)+4 = -4   b) -6+2+(-3) = -7

Lösung zu Aufgabe 444 ex-skalarprodukt-eigenschaften

a) Beide Definitionen (bzw. Berechnungsarten) verwenden nur die Multiplikation und Addition von reellen Zahlen, und dort dürfen die Operanden vertauscht werden (Kommutativgesetz).

b) Sind die Vektoren rechtwinklig aufeinander, beträgt der Winkel zwischen den Vektoren 90°. Es gilt $\cos(90°) = 0$ und damit ist das Skalarprodukt ebenfalls 0.

c) Benutzt man die erste Definition (Summe der Produkte der Komponenten) folgt die Eigenschaft sofort. Mit der zweiten Definition ist die Gleichung für $\lambda \geq 0$ offensichtlich, für $\lambda < 0$ muss beachtet werden, dass der Zwischenwinkel α zu $180° - \alpha$ wird. Der Cosinus ändert sein Vorzeichen, womit die Gleichung ebenfalls stimmt.

d) Mit der ersten Definition ist die Gleichung offensichtlich: Es wird komponentenweise ausmultipliziert.

e) Folgt direkt aus beiden Definitionen.

f) $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(0°) = |\vec{v}|^2$. Oder $\vec{v} \cdot \vec{v} = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}^2 = |\vec{v}|^2$.

g) Die linke Seite liefert ein Vielfaches von $\vec{c}$, die rechte Seite ein Vielfaches von $\vec{a}$. Sind die Vektoren von $\vec{0}$ verschieden und die Skalarprodukte nicht Null und $\vec{a}$ und $\vec{c}$ nicht parallel, sind die beiden Seiten sicher verschieden.

Lösung zu Aufgabe 445 ex-winkel-zwischen-vektoren-berechnen

Es gilt

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha) \qquad \text{mit } \alpha = \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}).$$

Daraus folgt

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}.$$

Lösung zu Aufgabe 446 ex-winkel-im-dreieck

Winkel $\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|}\right)$.

Analog für β und γ. Mit dem TR:

```
[2,-4,1] → a
[-2,-1,4] → b
[0,7,-2] → c
cos⁻¹(dotP(b-a,c-a)/norm(b-a)/norm(c-a))
```

$\cos^{-1}\left(\frac{16 \cdot \sqrt{1139}}{1139}\right)$

```
ctrl enter
```

61.7001

```
cos⁻¹(dotP(a-b,c-b)/norm(a-b)/norm(c-b))
ctrl enter
```

88.0726

```
cos⁻¹(dotP(a-c,b-c)/norm(a-c)/norm(b-c))
ctrl enter
```

30.2274

Überschlagsmässig stellt man fest, dass die Winkelsumme 180° beträgt. Das Resultat ist plausibel.

Lösung zu Aufgabe 447 ex-parallelorgramm-flaeche

Zeichnet man die Höhe h_a durch den Punkt D ein, erhält man mit A, D und dem Höhenfusspunkt H_a ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse d, Winkel α und Gegenkathete h_a. Damit ist

$$h_a = d \cdot \sin(\alpha).$$

Die Flächenformel für ein Parallelogramm ist $a \cdot h_a$, also

$$F = a \cdot d \cdot \sin(\alpha)$$

Lösung zu Aufgabe 448 ex-wuerfelkoordinaten

a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix}-4\\1\\-8\end{pmatrix}$, $\vec{AD} = \begin{pmatrix}-4\\-8\\1\end{pmatrix}$.

Die Vektoren haben beide die Länge 9 und deren Skalarprodukt ist 0, d.h. sie stehen rechtwinklig aufeinander, womit sie Seiten eines Quadrates sein können.

Es gilt (Skizze machen!) $\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{AD} = \begin{pmatrix}-3\\3\\-5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4\\-8\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\-5\\-4\end{pmatrix}$.

Der Vektor $\vec{AE}$ ist parallel zu $\vec{AB} \times \vec{AD}$. Da $\vec{AB}$ und $\vec{AD}$ rechtwinklig aufeinander sind, ist die Länge vom Vektorprodukt gleich dem Produkt der Längen, also 81. Diese Länge muss noch durch 9 dividiert werden, um die gewünschte Kantenlänge zu erhalten. Also

$\vec{AE} = \frac{1}{9}\vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{pmatrix}-7\\4\\4\end{pmatrix}$

Und damit: $\vec{OE} = \vec{OA} + \vec{AE} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-7\\4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\6\\7\end{pmatrix}$.

Entsprechend: $\vec{OF} = \vec{OB} + \vec{AE} = \begin{pmatrix}-3\\3\\-5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-7\\4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10\\7\\-1\end{pmatrix}$ und

$\vec{OG} = \vec{OC} + \vec{AE} = \begin{pmatrix}-7\\-5\\-4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-7\\4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-14\\-1\\0\end{pmatrix}$ und

$\vec{OH} = \vec{OD} + \vec{AE} = \begin{pmatrix}-3\\-6\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-7\\4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10\\-2\\8\end{pmatrix}$.

b) DF ist eine Seitendiagonale, muss als $\sqrt{2}$ mal so lang wie AD sein und rechtwinklig zu AD sein.

$|\vec{AD}| = 29$ und $|\vec{AF}| = 29\sqrt{2}$. $\vec{AD} \cdot \vec{AF} = 0$ und damit sind die Vektoren rechtwinklig zueinander.

Der Punkt G ist einfach auszurechnen: $\vec{OG} = \vec{OF} + \vec{AD} = \begin{pmatrix}10\\-24\\32\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}12\\21\\16\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}22\\-3\\48\end{pmatrix}$.

Für die restlichen Punkte betrachten wir den Punkt M_{AF}. Der Vektor $\vec{M_{AF}E}$ steht rechtwinklig auf $\vec{AF}$ und $\vec{AD}$, er ist also parallel zu $\vec{AD} \times \vec{AF}$. Da die Vektoren im Vektorprodukt rechtwinklig sind, ist die Länge vom Produkt gleich dem Produkt der Längen. Das Resultat muss also durch die Länge von $\vec{AD}$ und dann noch 2 geteilt werden:

$\vec{M_{AF}E} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{29} \cdot \vec{AD} \times \vec{AF} = \begin{pmatrix}-17.5\\2.0\\10.5\end{pmatrix}$. Damit ist

$\vec{OE} = \vec{OM_{AF}} + \vec{M_{AF}E} = \begin{pmatrix}3.5\\-10\\18.5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-17.5\\2\\10.5\end{pmatrix} = (-14, -8, 29)$ und

$\vec{OB} = \vec{OM_{AF}} - \vec{M_{AF}E} = \begin{pmatrix}3.5\\-10\\18.5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-17.5\\2\\10.5\end{pmatrix} = (21, -12, 8)$.

Und schliesslich $\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{AD} = (21, -12, 8) + 12; \vec{21}; 16 = \begin{pmatrix}33\\9\\24\end{pmatrix}$ und

$\vec{OH} = \vec{OE} + \vec{AD} = (-14, -8, 29) + 12; \vec{21}; 16 = (-2, 13, 45)$.

Lösung zu Aufgabe 449 ex-crossP-formel-herleiten-mit-TR

Es muss gelten

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \qquad \text{und} \qquad \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$$

Also
$$\left\{\begin{array}{rcll} u_1w_1+u_2w_2+u_3w_3 &=& 0 & (1)\\ v_1w_1+v_2w_2+v_3w_3 &=& 0 & (2)\end{array}\right. \qquad\Rightarrow\qquad w_3=-\tfrac{u_1w_1+u_2w_2}{u_3}\quad (\text{wenn } u_3\neq 0)$$

Eingesetzt in (2):

$$\begin{aligned} v_1w_1+v_2w_2-v_3\frac{u_1w_1+u_2w_2}{u_3} &= 0 && |\cdot u_3 \quad (\text{Die Annahme } u_3\neq 0 \text{ gilt weiterhin})\\ u_3v_1w_1+u_3v_2w_2-u_1v_3w_1-u_2v_3w_2 &= 0 &&\\ w_1(u_3v_1-u_1v_3)+w_2(u_3v_2-u_2v_3) &= 0 && |-w_2(u_3v_2-u_2v_3)\\ w_1(u_3v_1-u_1v_3) &= w_2(u_2v_3-u_3v_2) && \end{aligned}$$

Es fehlt eine Gleichung, wir können also eine Variable frei wählen. Die obige Gleichung ist trivialerweise wie folgt erfüllt:
$$w_1\underbrace{(u_3v_1-u_1v_3)}_{w_2}=w_2\underbrace{(u_2v_3-u_3v_2)}_{w_1},$$
also
$$w_1=u_2v_3-u_3v_2 \qquad \text{und} \qquad w_2=u_3v_1-u_1v_3.$$
Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} w_3=-\frac{u_1w_1+u_2w_2}{u_3}&=-\frac{1}{u_3}\cdot\left(u_1(u_2v_3-u_3v_2)+u_2(u_3v_1-u_1v_3)\right)=\\ &-\frac{1}{u_3}\cdot(u_1u_2v_3-u_1u_3v_2+u_2u_3v_1-u_2u_1v_3)=-\frac{1}{u_3}\cdot(u_2u_3v_1-u_1u_3v_2)=\\ &-(u_2v_1-u_1v_2)=u_1v_2-u_2v_1.\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich
$$\vec{w}=\begin{pmatrix}u_2v_3-u_3v_2\\ u_3v_1-u_1v_3\\ u_1v_2-u_2v_1\end{pmatrix}$$
Das Quadrat der Länge von $\vec{w}$ werden wir auf zwei Arten berechnen: Erstens als $\vec{w}\cdot\vec{w}$ (unten in der Variablen `lw` gespeichert), zweitens als das Quadrat der gewünschten Länge des Vektorprodukts $|\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2\cdot\sin(\sphericalangle(\vec{u},\vec{v}))^2$, unten in der Variablen `vw` gespeichert.
Es gilt $\sin(\alpha)^2=1-\cos(\alpha)^2$. Der Cosinus kann mit dem Skalarprodukt berechnet werden.
Die gewünschte Länge ist also

$$|\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2\cdot\left(1-\overbrace{\frac{(\vec{u}\cdot\vec{v})^2}{|\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2}}^{\cos(\sphericalangle(\vec{u},\vec{v}))^2}\right)\overset{|\vec{u}|^2=\vec{u}\cdot\vec{u}}{=}(\vec{u}\cdot\vec{u})\cdot(\vec{v}\cdot\vec{v})-(\vec{u}\cdot\vec{v})^2$$

Auf dem TR kann die Gleichheit der Ausdrücke überprüft werden (ginge auch von Hand):
```
[v1,v2,v3] → v
[u1,u2,u3] → u
[u2·v3-u3·v2, u3·v1-u1·v3, u1·v2 - u2· v1] → w
dotP(w,w) → lw
dotP(u,u)·dotP(v,v) - dotP(u,v)^2 → vw
lw-vw
expand(lw-vw)
```
Wenn der TR Null liefert, haben wir eine Formel zur Berechnung des Vektorprodukts gefunden.
In Maxima (ein freies Computer-Algebra-System) sieht das wie folgt aus:

```
u:matrix([u1,u2,u3]);
v:matrix([v1,v2,v3]);
```

```
w:matrix([u2*v3-u3*v2, u3*v1-u1*v3, u1*v2-u2*v1]);
u.u * v.v - (u.v)^2 - w.w;
```

$$-\left(u_3\,v_3+u_2\,v_2+u_1\,v_1\right)^2+\left(u_3^2+u_2^2+u_1^2\right)\,\left(v_3^2+v_2^2+v_1^2\right)+\left(u_3\,v_2-u_2\,v_3\right)\,\left(u_2\,v_3-u_3\,v_2\right)+\left(u_3\,v_1-u_1\,v_3\right)\,\left(u_1\,v_3-u_3\,v_1\right)+\left(u_2\,v_1-u_1\,v_2\right)\,\left(u_1\,v_2-u_2\,v_1\right)$$

```
expand(u.u * v.v - (u.v)^2 - w.w);
```

$$0$$

Die korrekte Händigkeit kann wie folgt überprüft werden: Man setzt für $\vec{u}=\vec{e}_1$ und $\vec{v}=\vec{e}_2$ ein und erhält wie gewünscht

$$\vec{w}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\vec{e}_3,$$

also die korrekte Händigkeit. Um zu zeigen, dass die Händigkeit für alle Vektoren gültig ist, stellen wir uns vor, dass $\vec{u}$ und $\vec{v}$ zusammen kontinuierlich im Raum gedreht werden. Damit muss sich auch $\vec{w}$ kontinuierlich mitdrehen, weil die Formeln für $\vec{w}$ keine «Sprünge» zulassen. Damit ist es nicht möglich, dass $\vec{w}$ plötzlich die Händigkeit (d.h. das Vorzeichen) wechselt.

Lösung zu Aufgabe 450 ex-crossp-von-hand

a) $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 1-(-1)\cdot 2\\(-1)\cdot(-3)-1\cdot 1\\1\cdot 2-2\cdot(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\\8\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\-3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-1)\cdot 1-3\cdot(-3)\\3\cdot(-2)-2\cdot 1\\2\cdot(-3)-(-1)\cdot(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-8\\-8\end{pmatrix}$

Lösung zu Aufgabe 451 ex-eigenschaften-vektor-produkt

a) Falsch. Beim Vertauschen ändert die Orientierung. Richtig ist $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$.

b) Richtig, weil $\vec{a}$ und $\vec{a}\times\vec{b}$ orthogonal sind, ist das Skalarprodukt 0 ($\cos(90°)=0$).

c) Falsch. Die aufgespannte Fläche ist 0 ($\sin(0°)=0$), das Resultat ist aber der Nullvektor, nicht die Zahl 0. Korrekt wäre $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$.

d) Falsch. In diesem Fall ist die Länge vom Produkt gleich dem Produkt der Längen ($\sin(90°)=1$).

e) Falsch. Die Dreiecksfläche ist die Hälfte der Parallelogrammfläche. Es gilt also $F=\frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|$.

f) Das Vektorprodukt zweier Vektoren einer Ebene ergibt einen Vektor senkrecht zu dieser Ebene. Das Skalarprodukt zweier Vektoren mit gleicher Richtung ist aber das betragsmässig das Produkt der Längen. Richtig (und nützlich) wäre z.B. $(\vec{AB}\times\vec{AC})\times(\vec{AB}\times\vec{AD})=\vec{0}$

Lösung zu Aufgabe 452 ex-repe-vektor-basics
Für den TR werden die Vektoren $\vec{OA}$ etc. in `a,b,c` gespeichert.

a) $|\vec{AB}| = |\vec{OB} - \vec{OA}| = \left|\begin{pmatrix}-1\\-1\\-4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.
$\vec{AC} = \left|\begin{pmatrix}0\\-6\\6\end{pmatrix}\right| = \sqrt{72} = \sqrt{36\cdot 2} = 6\sqrt{2}$.
TR: `norm(b-a)` und `norm(c-a)`.

b) $\cos(\alpha) = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{|\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|} = \frac{-18}{3\sqrt{2}\cdot 6\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$. Also $\alpha = \arccos(-0.5) = 120°$.

c) Nein, weil ein Winkel bereits grösser als 90° ist. Alternativ könnten die Skalarprodukte $\vec{BA}\cdot\vec{BC}$ und $\vec{CA}\cdot\vec{CB}$ berechnet und festgestellt werden, dass diese nicht null sind.

d) $F = \frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}| = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}-30\\6\\6\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{972} = \frac{1}{2}\sqrt{12\cdot 81} = \frac{1}{2}\sqrt{3\cdot 4\cdot 81} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot 2\cdot 9 = 9\sqrt{3}$
TR: `norm(crossP(b-a,c-a))/2` (Die Reihenfolge spielt hier keine Rolle, da nur die Länge, nicht aber die Richtung gebraucht wird).

e) $\vec{OM_{BC}} = \frac{1}{2}(\vec{OB}+\vec{OC}) = \begin{pmatrix}\frac{9}{2}\\\frac{1}{2}\\-2\end{pmatrix}$, also $M_{BC} = (\frac{9}{2}, \frac{1}{2}, -2)$.
TR: `(b+c)/2` $\to$ `m`

f) $\vec{OS} = \frac{1}{3}\cdot\left(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}\right) = \begin{pmatrix}\frac{14}{3}\\\frac{5}{3}\\-\frac{7}{3}\end{pmatrix}$
TR: `(a+b+c)/3` $\to$ `s`

g) $g:\ \vec{OG}(\lambda) = \vec{OA} + \lambda\vec{AM_{BC}} = \begin{pmatrix}5\\4\\-3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{7}{2}\\1\end{pmatrix}$.
TR: `a+l*(m-a)` $\to$ `g(l)`

h) S liegt auf g, wenn die Gleichung $\vec{OG}(\lambda) = \vec{OS}$ eine Lösung für λ hat. Die erste Komponente der Gleichung lautet $5 + (-\frac{1}{2})\lambda = \frac{14}{3}$, woraus $\lambda = \frac{2}{3}$ folgt. Setzt man diese Lösung in die anderen Komponenten ein, stellt man fest, dass die Gleichung eine wahre Aussage ergibt, also $S \in g$.
TR: `solve(g(l)=s,l)` ergibt eine Lösung. (Anderfalls würde man `false` (Falsche Aussage, Gleichung nicht lösbar) erhalten.
Bonus. Allgemein erhält man die Gleichung

$$\vec{OA} + \lambda\left(\frac{1}{2}(\vec{OB}+\vec{OC}) - \vec{OA}\right) = \frac{1}{3}\cdot\left(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}\right)$$

Da die drei Punkte völlig unabhängig sind, muss die Gleichung auch dann gültig sein, wenn B, C im Ursprung liegen. Die Gleichung ist dann

$$\vec{OA} - \lambda\cdot\frac{1}{2}\vec{OA} = \frac{1}{3}\vec{OA},$$

mit der Lösung $\lambda = \frac{2}{3}$. Eingesetzt in die Ursprungsgleichung stellt man fest, dass die Gleichung so erfüllt wird.

Lösung zu Aufgabe 453 ex-repe-wuerfel

$A = (1, 0, -6)$, $C = (8, 7, 2)$, $D = (0, 8, -2)$, $G = (4, 3, 9)$, $H = (-4, 4, 5)$.

$\vec{OA} = \vec{OB} + \vec{FE}$

Zum Beispiel: $\vec{AD} = \frac{1}{|\vec{AE} \times \vec{AB}|} \cdot \vec{AE} \times \vec{AB} \cdot |\vec{AB}| = \frac{1}{|\vec{AB}|} \cdot \vec{AE} \times \vec{AB}$

Die restlichen Punkte folgen aus den Orstvektoren von A, B, E, F plus $\vec{AD}$.

Lösung zu Aufgabe 454 ex-repe-bewegung

a) Die Positionsdifferenz pro Sekunde ist $\frac{1}{60}$ der Differenz pro Minute, d.h. $\vec{v} = \frac{1}{60}\vec{AB} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$. Damit ist die Parameterdarstellung wie folgt:

$$\vec{OG}(t) = \vec{OA} + t \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} -2500 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

b) Geschwindigkeit $v = |\vec{v}| = 11$ (in m/s).

c) Geschwindigkeit über Boden ist $\vec{v}_{\text{GND}} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$, der Betrag davon ist $|\vec{v}_{\text{GND}}| = \sqrt{117} \approx 10.82$ (in m/s).

d) Wir suchen t so, dass die dritte Komponente von $\vec{OG}(t)$ gleich 0 ist. Man erhält $t = 500$ (in Sekunden), also 8 min 20 s.

e) Wir setzen $t = 500$ ein und erhalten die Landekoordinaten $\vec{OG}(500) = \begin{pmatrix} 2000 \\ 4000 \\ 0 \end{pmatrix}$.

f) Variante 1: Schnittpunkte mit der Kugel berechnen und feststellen, es gibt zwei Schnittpunkte, also Luftraumverletzung.

Variante 2: Den Abstand der Geraden vom Ursprung berechnen. Dieser entspricht der Höhe auf $\vec{v}$ des Paralellorgramms aufgespannt durch $\vec{AO}$ und $\vec{v}$. Diese Höhe ist gleich Fläche geteilt durch Grundlinie, also $d = \frac{|\vec{AO} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|} \approx 2328$ (in m). Also Luftraumverletzung.