b) Man kann diese Wahrscheinlichkeit wie folgt ausdrücken:
$P(Z < 33) = P(10X + Y < 33) = P(X < 3) + P(X = 3 \text{ und } Y < 3) = \frac{2}{6} + P(X = 3) \cdot P(Y < 3) = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{7}{18}$

c) $P(X + X = 5) = 0$, weil das doppelte eines Würfelwurfs immer gerade ist.

Lösung zu Aufgabe 479 ex-erwartungswert-einfach

a) $E(X) = \sum_{i=1}^{6} i \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot \frac{1+6}{2} = \frac{7}{2} = 3.5$

b) Erst müssen die Wahrscheinlichkeiten $P(Y = i)$ bestimmt werden. Es gilt:
$P(Y = i) = P(X = i \text{ und } Y \leq i) + P(X < i \text{ und } Y = i) = P(X = i) \cdot P(Y \leq i) + P(X < i) \cdot P(Y = i) = \frac{1}{6} \cdot \frac{i}{6} + \frac{i-1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2i-1}{36}$
$E(Y) = \sum_{i=1}^{6} i \cdot \frac{2i-1}{36} = \frac{161}{36} \approx 4.472.$

c) Totalverlust mit $P(Z = -100) = \frac{19}{37}$, Gewinn mit $P(Z = 100) = \frac{18}{37}$. Also
$E(Z) = -100 \cdot \frac{19}{37} + 100 \cdot \frac{18}{37} = -\frac{100}{37} \approx -2.703$

Lösung zu Aufgabe 480 ex-erwartungswert-bis-sechser

a) $P(X = 1) = P(\text{erster Wurf eine «Sechs»}) = \frac{1}{6}$.
$P(X = 2) = P(\text{erster Wurf keine «Sechs»}) \cdot P(\text{zweiter Wurf eine «Sechs»}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$.
$P(X = 3) = P(\text{zwei Würfe keine «Sechs»}) \cdot P(\text{dritter Wurf eine «Sechs»}) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$.

b) $P(X = i) = P((i-1) \text{ Würfe keine «Sechs»}) \cdot P(\text{letzter Wurf eine «Sechs»}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{6}$.

c) $E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{6} = 6$ (mit TR).

Lösung zu Aufgabe 481 ex-erwartungswert-zahlenraten

a) Sie sollten in maximal 7 Versuchen zum Ziel kommen.

b) Man ratet eine Zahl in der Mitte des verbleibenden Bereichs. So wird die Anzahl der verbleibenden Zahlen in jedem Schritt mindestens halbiert.

c) Wenn man immer halbiert, dann bleiben im schlechtesten Fall übrig: 50,25,12,6,3,1,0. Man kommt also mit 7 Versuchen zum Ziel.
Für $n = 1'000'000$ sieht die ungünstigste Reihe wie folgt aus:
500000, 250000, 125000, 62500, 31250, 15625, 7812, 3906, 1953, 976, 488, 244, 122, 61, 30, 15, 7, 3, 1, 0
also in 20 Versuchen. Für allgemeines n reichen ungefähr $\log_2(n) + 1$ Versuche.

d) $E(X_1) = 1$.

$E(X_2) = 1 \cdot P(X = 1) + 2 \cdot P(X = 2)$. Die Wahrscheinlichkeit, dass man die Zahl beim ersten Versuch erratet ist $\frac{1}{2}$. Damit ist
$E(X_2) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$

$E(X_3)$: $P(X = 1) = \frac{1}{3}$. Man wird natürlich die mittlere Zahl wählen. D.h. danach beträgt die bedingte Wahrscheinlichkeit, die richtige Zahl im zweiten Versuch zu finden 1. Also
$E(X_3) = 1 \cdot P(X_3 = 1) + 2 \cdot P(X_3 = 2) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \approx 1.667$

e) Zeichnen Sie auch ein Baumdiagramm für dieses Experiment.
$P(X_4 = 1) = \frac{1}{4}$. Die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass sonst eine Zahl übrig bleibt beträgt $\frac{1}{3}$, wofür dann insgesamt $E(X_1) + 1$ Versuche nötig sind. Zwei Zahlen bleiben übrig mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$, wofür dann insgesamt $E(X_2) + 1$ Versuche nötig sind. Also:
$E(X_4) = 1 \cdot P(X_4 = 1) + P(X_4 > 1) \cdot \left(\frac{1}{2}(E(X_1) + 1) + \frac{1}{2}(E(X_2) + 1)\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2}\right) = \frac{31}{16} = 1.9375$