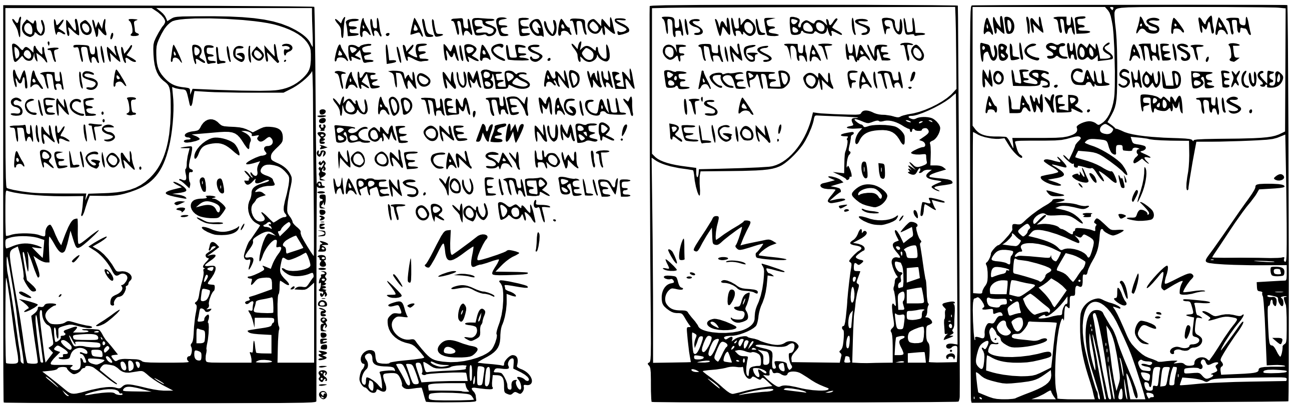
1 Zahlen

Calvin and Hobbes



Das Bild ist raubmordkopiert von http://www.gocomics.com/calvinandhobbes/2011/03/09

Calvin: Weisst Du, ich glaube, Mathe ist keine Wissenschaft, sondern eine Religion.

Hobbes: Eine Religion?

Calvin: Ja, all diese Gleichungen sind wie Wunder. Du nimmst zwei Zahlen, und wenn Du sie addierst, wird wie durch ein Wunder eine *neue* Zahl daraus! Niemand weiss, wie es passiert. Entweder man glaubt es, oder man glaubt es nicht. - Das ganze Buch ist voll mit Sachen, die nur durch den Glauben belegt sind! Es ist eine Religion!

Hobbes: Und das in einer staatlichen Schule. Ruf Deinen Anwalt an!

Calvin: Als Mathe-Atheist müsste ich davon befreit sein.

Die Übersetzung ist raubmordkopiert und adaptiert von http://matheismus.myblog.de/matheismus/page/1249630

1.1 Glauben oder beweisen?

Ein Alleinstellungsmerkmal der Mathematik ist, dass man nichts glauben muss, sondern alle mathematischen Sachverhalte bewiesen werden können (und als Mathematiker müssen!), bis auf ganz wenige Grundannahmen, die sogenannten Axiome.

Fast die gesamte moderne Mathematik kann auf 10 Axiome der Mengenlehre zurückgeführt werden. Siehe z.B. https://de.wikipedia.org/wiki/Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre.

Damit die Zahlen zu definieren ist zwar sehr spannend, aber formell etwas zu anspruchsvoll. Auch die 5 *Peano-Axiome*, die die natürlichen Zahlen definieren sind für unsere Zwecke zu formell und wenig intuitiv. Siehe z.B. https://de.wikipedia.org/wiki/Peano-Axiome.

Wir werden deshalb die Zahlen geometrisch definieren und deren Eigenschaften damit beweisen.

1.2 Natürliche Zahlen

Definition 1

Die Menge der natürlichen Zahlen: ✎

Hinweis: An den Mittelschulen wird oft $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ohne die Null definiert. Im wissenschaftlichen Umfeld ist die Null normalerweise in $\mathbb{N}$ enthalten. Folgende Notationen sind hingegen eindeutig:

- $\mathbb{N}_0 =$✎
- $\mathbb{N}^+ =$✎

1.2.1 Geometrische Definition der natürlichen Zahlen

Auf einer Geraden wähle man zwei von einander verschiedene Punkte und beschrifte diese mit **0** und **1**.

✎

Von einer Zahl n aus kann die nächste Zahl $n+1$ wie folgt konstruiert werden: Man trägt den Abstand von 0 nach 1 in *gleicher Richtung* von n aus ab.

Damit haben wir axiomatisch die natürlichen Zahlen als Punkte auf einer Geraden definiert. Jetzt gilt es, die bekannten Rechengesetze zu definieren.

1.2.2 Addition von natürlichen Zahlen

Wir haben soeben die Addition von 1 definiert. Die Addition von zwei beliebigen natürlichen Zahlen $n+m$ kann geometrisch wie folgt definiert werden:

✎

Damit sind folgende Dinge sofort einleuchtend:

- Die Addition zweier natürlichen Zahlen ist ebenfalls wieder eine natürliche Zahl.
- Für jedes Paar n, m natürlicher Zahlen gilt: $n + m = m + n$. Man nennt dies das **Kommutativgesetz** (Vertauschungsgesetz).
- Es gilt das **Assoziativgesetz**: $(a + b) + c = a + (b + c)$, d.h. man darf Klammern setzen wie man will.
- Die Addtion von 0 bewirkt nichts. Man nennt darum 0 das **Neutralelement** der Addition.
- Die beiden Elemente einer Addition nennt man **Summanden**.

Zwischenfrage: Nennen Sie eine Operation für die das Kommutativgesetz nicht gilt: ✎

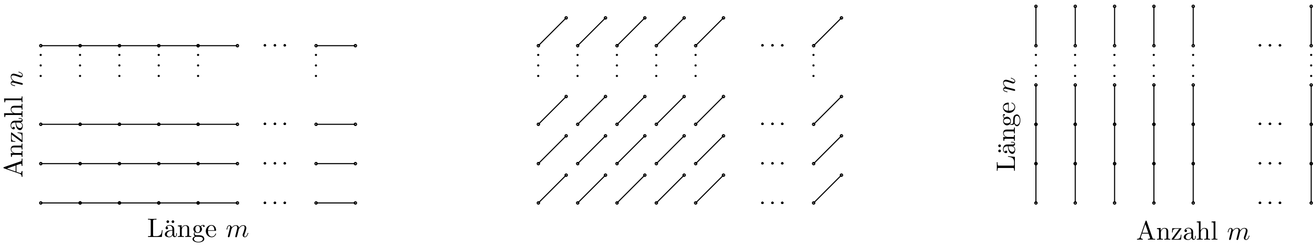
1.2.3 Multiplikation von natürlichen Zahlen

Formal kann die Multiplikation als wiederholte Addition definiert werden:

$$n \cdot m = \underbrace{m + m + \ldots + m}_{n \text{ mal}}$$

Damit ist aber nicht offensichtlich, dass das Kommutativgesetz auch für die Multiplikation gilt.

Geometrisch betrachtet werden n Strecken der Länge m aneinander gefügt. Offensichtlich (und damit mathematisch bewiesen) wird das Kommutativgesetz durch folgende Annordnung:



Hinweis: Man könnte das Resultat der Multiplikation $n \cdot m$ auch als Rechtecksfläche auffassen, dann ist das Kommutativgesetz ebenfalls sofort einleuchtend.

Damit halten wir fest:

- Die Multiplikation zweier natürlichen Zahlen ist ebenfalls wieder eine natürliche Zahl.
- Für jedes Paar n, m natürlicher Zahlen gilt das **Kommutativgesetz**: $n \cdot m = m \cdot n$.
- Es gilt das **Assoziativgesetz**: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, d.h. man darf Klammern setzen wie man will.
- Die Multiplikation mit 1 bewirkt nichts. Man nennt darum 1 das **Neutralelement** der Multiplikation.

- Die beiden Elemente in einer Multiplikation nennt man **Faktoren**.
- Den Multiplikationspunkt zwischen Buchstaben oder zwischen Zahl und Buchstaben lässt man meistens weg. Z.B. $n \cdot m = nm$ oder $6 \cdot a = 6a$ *(aber nicht $a6$).*

1.2.4 Addition und Multiplikation in $\mathbb{N}$

Es gilt die Regel **Punkt vor Strich**, Multiplikationen werden also vor Additionen durchgeführt:

$$4 + 3 \cdot 2 = 4 + (3 \cdot 2) \neq (4 + 3) \cdot 2$$

Weiter gilt das **Distributivgesetz**, d.h. man darf ausmultiplizieren:

$$n \cdot (m + k) = n \cdot m + n \cdot k$$

Aufgabe 1 Beweisen Sie das Distributivgesetz in $\mathbb{N}$. *Hinweis: Der Beweis kann ähnlich wie beim Kommutativgesetz geführt werden.*

1.2.5 Subtraktion in $\mathbb{N}$

Die Subtraktion $n - m$ in $\mathbb{N}$ ist nur dann möglich, wenn $n \geq m$. Geometrisch wird dann die Strecke von 0 zu m in *entgegengesetzter Richtung* von n aus abgetragen.
Sind in einem Ausdruck Addition und Subtraktion vorhanden, darf die Reihenfolge der Operationen gändert werden:

$$a - b + c = a + c - b$$

Selbstverständlich dürfen bei der Subtraktion die Operanden nicht vertauscht werden: $a - b \neq b - a$. Es gilt aber $a - b = -b + a$, wenn man zusätlich negative Zahlen hinzunähme.
Klammern auflösen
Ist der zweite Summand einer Addition eine Klammer, darf diese einfach weggelassen werden. Z.B.

$$a + (b + c - d) = a + b + c - d$$

Ist der Subtrahend (was in einer Subtraktion abgezogen wird) eine Klammer, darf diese weggelassen werden, wenn alle Operationszeichen '+' und '−' vertauscht werden, *aber nicht die Operationszeichen in inneren Klammern!*. Z.B.

$$a - (b+c-d) = a - b-c+d$$

Am besten werden Klammern von innen nach Aussen aufgelöst. Z.B.

$$a - (b - (c + d)) = a - (b - c-d) = a - b+c+d$$

Von aussen nach innen (nicht empfohlen!):

$$a - (b - (c + d)) = a - b+(c + d) = a - b + c + d$$

Aufgabe 2 Lösen Sie die Klammern auf und vereinfachen Sie:
a) $a - (b - (a - (b - (a + (b - a)))))$ b) $a - (b - (c + b) + (a - c)) - (b - (a - c + b))$

1.2.6 Division in $\mathbb{N}$

Die Division n/m (manchmal auch $n \div m$ oder. $n : m$ geschrieben) in $\mathbb{N}$ ist nur dann möglich, wenn n ein Vielfaches von m ist. Dann ist

$$n/m = k \qquad \Leftrightarrow \qquad n = k \cdot m$$

Geometrisch wird die Strecke von 0 bis n in m gleich grosse Teile geteilt.

Divisionen werden von von links nach rechts berechnet, d.h. $a/b/c = (a/b)/c$

Aufgabe 3 Beweisen Sie für $a, b, c \in \mathbb{N}^+$, dass

$$a/b/c = a/(b \cdot c)$$

✎

Aufgabe 4 Beweisen Sie für $a, b, c \in \mathbb{N}^+$, dass

$$a/b \cdot c = a \cdot c/b$$

d.h. man darf die Reihenfolge von Division und Multiplikation vertauschen. *Im Gegensatz zum Kommutativgesetz wird das Operationszeichen "mitgenommen".*

✎

Merke Klammern auflösen II

Wird mit einem Produkt oder Quotienten multipliziert, kann die Klammer weggelassen werden:

$$a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c \qquad \text{und} \qquad a \cdot (b/c) = a \cdot b/c$$

Wird durch ein Produkt oder Quotient dividiert, wird das Operationszeichen vertauscht ($/$ und $\cdot$)

$$a/(b \cdot c) = a/b/c \qquad \text{und} \qquad a/(b/c) = a/b \cdot c$$

Wie bei Addition und Subtraktion wird empfohlen die innerste Klammer zuerst aufzulösen.

1.3 Potenzen in $\mathbb{N}$

Definition 2

$b^e = \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{e \text{ Faktoren}}$ für $b \in \mathbb{N}$ und $e \in \mathbb{N}^+$

Man nennt b **Basis**, e **Exponent**, b^e eine **Potenz** und den Rechenvorgang nennt man **potenzieren**.

1.3.1 Rechenregeln

Potenzen haben eine noch höhere Priorität als Punkt-Operationen (Multiplikation, Division). Z.B.

$$3 \cdot 3^2 = 3 \cdot (3^2) = 3 \cdot 9 = 27 \quad \neq \quad (3 \cdot 3)^2 = 9^2 = 81$$

Bei Potenzen wird zuerst der Exponent berechnet, bevor potenziert wird. D.h.

$$3^{3^3} = 3^{(3^3)} = 3^{27} = 7'625'597'484'987 \quad \neq \quad (3^3)^3 = 27^3 = 19'683$$

Potenzen haben auch Vorrang gegenüber der Gegenzahlbildung. Z.B.

$$-4^2 = -(4^2) = -16 \quad \neq \quad (-4)^2 = (-4) \cdot (-4) = 16$$

1.3.2 Potenzgesetze

Seien $a, b \in \mathbb{N}$ Basen und $e, f \in \mathbb{N}^+$ Exponenten. Es gelten folgende Potenzgesetze:

$a^e \cdot a^f =$ ✎

Beweis/ ✎

$a^e \cdot b^e =$ ✎

Beweis: ✎

$(a^e)^f =$ ✎

Beweis: ✎

Für $e > f$ gilt: $a^e / a^f =$ ✎

Beweis: ✎

$a^e / b^e =$ ✎

Beweis: ✎

1.3.3 Hoch Null

Wie soll a^0 definiert werden (für $a \in \mathbb{N}^+$)? Die obigen Potenzgesetze sollen auch weiterhin gültig bleiben (Permanenzprinzip).

Aufgabe 5 Bestimmen Sie mit Hilfe des ersten Potenzgesetz oben, wie a^0 zu definieren ist.

✎

Hinweis: 0^0 ist nicht eindeutig definierbar. In vielen Fällen macht es aber aus ästhetischen Gründen Sinn, $0^0 = 1$ zu definieren.

1.3.4 Potenzen zum Auswendig lernen

n^2 bis $n = 20$, n^3 bis $n = 5$, 3^e bis $e = 5$ und 2^e bis $e = 10$.

Aufgabe 6 Erstellen Sie eine Tabelle mit allen auswendig zu lernenden Potenzen.

Aufgabe 7 Berechnen Sie im Kopf, aber vereinfachen Sie zuerst mit den Potenzgesetzen!
Beispiel: $20^6/2^8/5^5 = (2^2 \cdot 5)^6/2^8/5^5 = (2^2)^6 \cdot 5^6/2^8/5^5 = 2^{12}/2^8 \cdot 5^6/5^5 = 2^4 \cdot 5 = 2^3 \cdot 2 \cdot 5 = 8 \cdot 10 = 80$
a) $100^4/2^7/25^3$
b) $16^5/8^6$
c) $3^{3^2}/(3^3)^2$

1.4 Teiler und Primzahlen

Ein **Teiler** t einer natürlichen Zahl n ist eine natürliche Zahl, für die die Division n/t in $\mathbb{N}$ aufgeht.

Definition 3 Primzahl

Eine natürliche Zahl p ist eine Primzahl, wenn p genau zwei verschiedene Teiler hat (nämlich 1 und sich selbst).

Aufgabe 8 Warum ist 1 keine Primzahl?

Aufgabe 9 Kann die Summe zweier Primzahlen eine Primzahl sein?

Aufgabe 10 Gibt es eine Zahl n, die gleich der Summe ihrer Teiler ist (ohne den Teiler n selbstverständlich)?

Satz 1 Primfaktorzerlegung

Jede positive natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}^+$ hat eine eindeutige Zerlegung in Primfaktoren (bis auf deren Reihenfolge). D.h. n lässt sich schreiben als

$$n = 1 \cdot p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{e_m}$$

wobei $m \in \mathbb{N}$ die Anzahl Primfaktoren ist, p_1 bis p_m sind die einzelnen Primzahlen und e_1 bis e_m sind die jeweiligen Exponenten.

Aufgabe 11 Zerlegen Sie die Zahlen 1, 6, 28, 31, 625, 1024 und 1'000'000 in ihre Primfaktoren. Schreiben Sie die Zerlegung in der Form von Satz 1 und illustrieren Sie, was m, p_1, e_1 und so weiter jeweils sind.

1.5 Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

Die Subtraktion $n - m$ in den natürlichen Zahlen kann nur dan ausgeführt werden, wenn $n \geq m$ ist. Um dieses "Manko" zu beheben, werden zusätzliche negative Zahlen eingeführt. Dabei sollen alle bekannten Rechengesetze "weiter bestehen" bleiben. Man spricht vom **Permanenzprinzip**.
Die geometrische Definition der Subtraktion bleibt erhalten und definiert damit zusätzliche Punkte auf der Zahlengeraden "auf der anderen Seite der Zahl 0", von der nun wiederholt 1 abgezogen werden kann. Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ wird wie folgt definiert:

Definition 4 Ganze Zahlen

✎

Man definiert noch $\mathbb{Z}^\star = \{\ldots, -2, -1, 1, 2, 3\}$, alle ganzen Zahlen ohne die Null. Oder anders geschrieben $\mathbb{Z}^\star = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
Die geometrische Addition von negativen Zahlen muss ebenfalls nicht neu definiert werden.

1.5.1 Minuszeichen: 3 Arten

Das Minuszeichen hat **drei** verschiedene Bedeutungen:

Operationszeichen für die Subtraktion, z.B. $8 - 3$.

Vorzeichen bei negativen Zahlen, z.B. -15.

Bilden der Gegenzahl , z.B. $-(4 + 2)$.

1.5.2 Multiplikation in $\mathbb{Z}$

Die Multiplikation $n \cdot z$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{Z}$, $z < 0$ ist geometrisch wohl definiert, es wird n mal die Strecke von 0 bis z in die "negative Richtung" abgetragen, und es gilt $n \cdot z = \underbrace{z + z + \ldots + z}_{n \text{ Summanden}}$.
Mit dieser Definition lässt sich aber $z \cdot n$ nicht ohne weiteres definieren; eine negative Anzahl Strecken ist schwierig zu handhaben. Das Permanenzprinzip verlangt aber, dass die Rechengesetze erhalten bleiben, und damit lässt sich $z \cdot n = n \cdot z$ definieren.
Wir halten fest: Das Produkt einer positiven Zahl und einer negativen Zahl ist selbst negativ.

Multiplikation mit -1
Mit der geometrischen Definition ist klar dass $n \cdot (-1) = -n$ für $n \in \mathbb{N}$. Ein Minuszeichen kann durch die Multiplikationen mit -1 ersetzt werden:

Vorzeichen z.B. $-15 = (-1) \cdot 15$.

Operationszeichen $a - b = a + (-b) = a + (-1) \cdot b$.

Bilden der Gegenzahl , z.B. $-(4 + 2) = (-1) \cdot (4 + 2)$.

Merke Subtraktionen sind auch nur Additionen

Eine Subtraktion kann (und soll) als Addition der Gegenzahl aufgefasst werden.

Aus dieser Sichtweise kann von Summen und Summanden gesprochen werden, auch wenn Subtraktionen vorkommen.

Aufgabe 12 Ersetzen Sie in folgenden Ausdrücken sämtliche Minus-Zeichen durch eine Multiplikation mit -1. Vereinfachung und Klammern auflösen ist nicht nötig.

a) $-(a-(b-c)) =$ ✎

b) $c-(b-(-4)+d) =$ ✎

Multiplikation von zwei negativen Zahlen

Wie ist nun aber das Produkt $(-a)\cdot(-b)$ zu definieren, wenn $a, b \in \mathbb{N}$?

$$(-a)\cdot(-b) = ((-1)\cdot a)\cdot((-1)\cdot b) = (-1)\cdot(-1)\cdot a\cdot b$$

Es bleibt also nur noch eine sinnvolle Definition für $(-1)\cdot(-1)$ zu finden. Dass die Multiplikation mit -1 die Gegenzahl bildet, soll auch in ganz $\mathbb{Z}$ gültig sein, und damit muss $(-1)\cdot(-1) = 1$ sein. Es gilt also

$$(-a)\cdot(-b) = a\cdot b$$

oder salopp ausgedrückt: **"Minus mal Minus gibt Plus"**.

Für diesen Sachverhalt gibt noch weitere intuitive Erklärungen. Z.B. könnte man die negative Anzahl Strecken als "in die andere Richtung abtragen" interpretieren.

Oder man stellt sich ein kurzes Video vor, in dem ein Fahrzeug zu sehen ist. Je nach Richtung, in der es fährt, ist die Geschwindigkeit positiv oder negativ. Die Zeit läuft positiv, es sei denn, man schaut das Video rückwärts an. Weiter gilt:

$$\text{Strecke} = \text{Geschwindigkeit} \cdot \text{Zeit}$$

Fährt das Fahrzeug rückwärts (negative Geschwindigkeit) und man schaut das Video rückwärts (negative Zeit), legt das Fahrzeug eine positive Strecke zurück.

1.5.3 Betrag einer Zahl

Definition 5 Betrag einer Zahl

Der Betrag $|z|$ einer Zahl z ist gleich der *richtungslosen* Entfernung von 0.

Beispiele: $|-42| = 42$ und $|42| = 42$.

Formal:

$$|z| = \begin{cases} z & \text{wenn } z \geq 0 \\ -z & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Betrag einer Zahl z ist gleich z, wenn z positiv oder Null ist. Ist z negativ, ist der Betrag von z gleich der Gegenzahl $-z$. Der Betrag selbst ist also immer ein positive Zahl (oder Null).

Aufgabe 13 Berechnen Sie:

a) $-4 - \big| - |-3-(-1)+(-4)| - 8 + |-7-(-3)+(-5)|\big|$

b) $-\big| - |-4-(-2)+(-5)| - 9 + |-8-(-2)+(-3)|\big| - 5$

c) $-1 - \big| -17 - |-7-(-3)+(-2)| + |-5-(-1)+(-4)|\big|$

1.5.4 Division in $\mathbb{Z}$

Die Division ist wie schon in $\mathbb{N}$ nur eingeschränkt möglich. Die Vorzeichenregeln sind gleich wie bei der Multiplikation.

1.6 Die Bruchzahlen $\mathbb{Q}$

Damit die Division immer möglich ist (ausser durch Null), muss der Zahlraum nochmals erweitert werden. Die Division z/n mit $z \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}^+$ ergibt die Zahl $\frac{z}{n} \in \mathbb{Q}$. z wird **Zähler** und n wird **Nenner** genannt.

Definition 6 Menge der Bruchzahlen $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q} = \{z/n \mid z \in Z \text{ und } n \in \mathbb{N}^+\}$
$\mathbb{Q}^\star = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$
Die Bruchzahlen werden auch **rationale Zahlen** genannt.

Um geometrisch den Punkt $\frac{z}{n}$ zu konstruieren wird die Strecke von 0 zu z in n Teile zerteilt und eine solche Teilstrecke wird in der gleichen Richtung bei 0 abgetragen.
Es gibt also für ein und dieselbe Bruchzahl unendlich viele Darstellungen, nämlich $\frac{z}{n} = \frac{2z}{2n} = \frac{3z}{3n} = \ldots$.
Beweis: für $k \in \mathbb{N}^+$:

$$\frac{kz}{kn} = (k \cdot z)/(k \cdot n) = k \cdot z/k/n = k/k \cdot z/n = 1 \cdot z/k = \frac{z}{n}$$

Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl $k \in \mathbb{N}^+$ multiplizieren nennt man **Erweitern**.
Haben Zähler und Nenner einen gemeinsamen (von 1 verschiedenen) Teiler t, können Zähler und Nenner durch t geteilt werden. Man nennt dies **Kürzen**:

$$\frac{z/t}{n/t} = (z/t)/(n/t) = z/t/n \cdot t = z/n \cdot t/t = z/n = \frac{z}{n}$$

Haben in einem Bruch $\frac{z}{n}$ Zähler und Nenner keine gemeinsamen von 1 verschiedenen Teiler, ist der Bruch **vollständig gekürzt**.

1.6.1 Darstellung von Brüchen

- Als Resultate werden Brüche **immer vollständig gekürzt** angegeben.
- Das Vorzeichen im Zähler wird vor den Bruch geschrieben. Z.B anstatt $\frac{-3}{4}$ wird $-\frac{3}{4}$ geschrieben.
- Brüche grösser als 1 werden auch als Bruch geschrieben. Z.B $\frac{5}{2}$ wird **nicht** als $2\frac{1}{2}$ geschrieben, um die Verwechslung mit $2 \cdot \frac{1}{2}$ zu vermeiden. Soll der ganzteilige Teil hervorgehoben werden ist $2 + \frac{1}{2}$ zu schreiben.

Diese Regeln gelten für die *Verwendung in der Mathematik*. Im Alltagsgebrauch sind "gemischte Brüche" wie $2\frac{1}{2}$ in Ordnung, auch wenn dann wohl 2.5 vorzuziehen wäre.

1.6.2 Multiplikation von Brüchen

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = (a/b) \cdot (c/d) = a/b \cdot c/d = a \cdot c/b/d = (ac)/(bd) = \frac{ac}{bd}$$

Bruch mal Bruch, wie macht's der Kenner? Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner.

1.6.3 Division und Kehrwert

$$\frac{a}{b}/\frac{c}{d} = (a/b)/(c/d) = a/b/c \cdot d = a/b \cdot d/c = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Durch einen Bruch dividiert man, indem man mit dem Kehrwert multipliziert. Den **Kehrwert** einer Bruchzahl q ist $\frac{1}{q}$. Ist $q = \frac{z}{n}$ ergibt sich $1/(z/n) = 1/z \cdot n = 1 \cdot n/z = \frac{n}{z}$, d.h. den Kehrwert eines Bruchs erhält man, indem man Zähler und Nenner vertauscht.

Merke Divisionen sind auch nur Multiplikationen

Die Division kann als **Multiplikation mit dem Kehrwert** geschrieben werden.

Aus dieser Sichtweise kann auch von Produkten gesprochen werden, wenn darin Divisionen vorkommen. Dies ist analog zur Umwandlung einer Subraktion in die Addition der Gegenzahl.

Insbesondere gilt:

$$\frac{z}{n} = z \cdot \frac{1}{n}$$

Geometrisch ist die Definition der Multiplikation nicht mehr wirklich brauchbar, es sei denn man kennt zu jedem Punkt Zähler und Nenner, dann kann mit den gegebenen geometrischen Definition mit dem Zähler multipliziert und anschliessend durch den Nenner dividiert werden.

Es macht aber viel mehr Sinn, die Multiplikation als *Skalierung* (Vergrösserung oder Verkleinerung) von Strecken zu interpretieren. Um diese Konstruktionen geometrisch durchzuführen braucht man aber die Strahlensätze, ein Thema, das wir in der Geometrie erst im 2. Jahr behandeln werden.

1.6.4 Addition und Subtraktion von Brüchen

Geometrisch ist die Definition der Addition und Subtraktion unverändert gültig für Bruchzahlen.

Formal müssen die Brüche erst auf einen gemeinsamen Nenner erweitert werden:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \pm \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = ad \cdot \frac{1}{bd} \pm cb \cdot \frac{1}{bd} = (ad \pm cb) \cdot \frac{1}{bd} = \frac{ad \pm cb}{bd}$$

Hinweis: Es ist oft nützlich, nur auf den kleinsten gemeinsamen Nenner zu erweitern, z.B.

$$\frac{7}{8} + \frac{7}{12} = \frac{7 \cdot 3}{8 \cdot 3} + \frac{7 \cdot 2}{12 \cdot 2} = \frac{21}{24} + \frac{14}{24} = \frac{35}{24}$$

1.6.5 Potenzieren von Brüchen

Aus den Potenzgesetzen folgt direkt:

$$\left(\frac{z}{n}\right)^e = \frac{z^e}{n^e}$$

1.6.6 Mehrfachbrüche

Bei Mehrfachbrüchen steht im Zähler oder im Nenner (oder beiden) wieder ein Bruch, der auch ein Mehrfachbruch sein kann. Der längste Bruchstrich entspricht der Division, die zuletzt ausgeführt wird. Mehrfachbrüche können auf zwei Arten aufgelöst werden. Entweder durch die Klammerregeln:

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = (a/b)/c = a/b/c = a/(bc) = \frac{a}{bc}$$

$$\frac{a}{\frac{b}{c}} = a/(b/c) = a/b \cdot c = a \cdot c/b = \frac{ac}{b}$$

Oder, wohl eher einfacher, durch Ersetzen der Division durch die Multiplikation mit dem Kehrwert:

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$$

$$\frac{a}{\frac{b}{c}} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{1} \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$$

Aufgabe 14 Berechnen Sie:

a) $\dfrac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{\frac{2}{3}}{4}}$ b) $\dfrac{2 - \frac{4}{3}}{\frac{2}{\frac{3}{4}} + 2} - \dfrac{2}{3}$ c) $\dfrac{\frac{8^2+6^2+5^2}{2\cdot(2^5-3^3)^2}}{\left(\frac{5}{4}\right)^3}$ d) $-2 - \dfrac{-2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2}{-\frac{2}{-\frac{-3}{-2}}}$

e) $1 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}$ f) $\dfrac{\left(\frac{117}{127}\right)^4}{\frac{117^3}{127^5}} \cdot \dfrac{\frac{1}{117}}{127}$

1.7 Wie viele Zahlen gibt es?

Es ist klar, dass es unendlich viele natürliche Zahlen gibt. Es scheint auch klar, dass es irgendwie mehr ganze Zahlen und noch viel mehr Bruchzahlen zu geben scheint.

Leider versagt unsere Intuition gründlichst, wenn es um den Begriff der Unendlichkeit geht.

1.7.1 Abzählbarkeit

Eine (unendliche) Menge M ist abzählbar, wenn man alle Elemente durchnummerieren kann. Mit anderen Worten, M hat in diesem Sinne “gleich viele” Elemente wie $\mathbb{N}$. In der Mathematik spricht man von **Mächtigkeit** und sagt, M und $\mathbb{N}$ sind **gleich mächtig**.

$\mathbb{Z}$ ist abzählbar:

✎

In diesem Sinne hat $\mathbb{Z}$ gleich viele Elemente wie $\mathbb{N}$, oder korrekter: $\mathbb{Z}$ ist gleich mächtig wie $\mathbb{N}$.

$\mathbb{Q}$ ist abzählbar:

$\frac{-5}{5}$	$\frac{-4}{5}$	$\frac{-3}{5}$	$\frac{-2}{5}$	$\frac{-1}{5}$	$\frac{0}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$
$\frac{-5}{4}$	$\frac{-4}{4}$	$\frac{-3}{4}$	$\frac{-2}{4}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{0}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$
$\frac{-5}{3}$	$\frac{-4}{3}$	$\frac{-3}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{0}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$
$\frac{-5}{2}$	$\frac{-4}{2}$	$\frac{-3}{2}$	$\frac{-2}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$
$\frac{-5}{1}$	$\frac{-4}{1}$	$\frac{-3}{1}$	$\frac{-2}{1}$	$\frac{-1}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$

Damit ist auch $\mathbb{Q}$ gleich mächtig wie $\mathbb{N}$.

1.7.2 $\mathbb{Q}$ ist löchrig wie Schweizer Käse

Aufgabe 15 Berechnen Sie das Resultat folgender Summe als Dezimalbruch, wenn man a) nur die ersten drei Summanden, b) nur die ersten 6 Summanden und c) nur die ersten zehn Summanden addiert. Und d) was erhält man, wenn man alle (unendlich viele) Summanden addiert?

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10'000} + \ldots$$

Gedankenexperiment

Stellen Sie sich vor, Sie hätten einen Tipp-Ex-Roller. Mit diesem Roller wird auf der Zahlengeraden eine Zahl $q \in \mathbb{Q}$ (also ein Punkt) mit einem kleinen Streifen Tipp-Ex einer gewissen Länge $l \in \mathbb{Q}$ übermalt:

✎

Die rationalen Zahlen (Bruchzahlen) sind abzählbar, d.h. man kann sie durchnummerieren. Die erste Bruchzahl wird mit einem Streifen der Länge $\frac{3}{10}$ übermalt, die zweite mit einem Streifen der Länge $\frac{3}{100}$, die dritte mit $\frac{3}{1000}$ und so weiter.

Frage 1 Wie lange ist der Streifen für die n-te Bruchzahl?

Frage 2 Wie viel Tipp-Ex insgesamt braucht man so, um *alle* Bruchzahlen zu übermalen?

Frage 3 Kann das sein? Haben Sie ein Vermutung, wo das “Problem” liegen könnte?

✎

1.7.3 $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Schon die Pythagoräer wussten, dass nicht alles als Verhältnis von ganzen Zahlen beschrieben werden kann, wie z.B. die Länge der Diagonale des Einheitsquadrates.

Aufgabe 16 Berechnen Sie die Länge der Diagonalen in einem Quadrat mit der Seitenlänge 1.

Der folgende Beweis geht zurück auf den griechischen Mathematiker Euclid von Alexandria (ca. 300 v.Chr.).

Beweis: Zu zeigen ist, dass $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Um das zu beweisen, werden wir (fälschlicherweise) zuerst das Gegenteil annehmen, nämlich dass $\sqrt{2} = \frac{z}{n} \in \mathbb{Q}$. Wir werden zeigen, dass sich damit ein Widerspruch konstruieren lässt und damit unsere Annahme falsch sein muss.

Wir können natürlich annehmen, dass $\frac{z}{n}$ vollständig gekürzt ist. $\sqrt{2}$ ist jene Zahl, die mit sich selbst multipliziert 2 ergibt: ✎

1.8 Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Auf der Zahlengeraden enstpricht $\mathbb{R}$ der Menge *aller Punkte*. Dargestellt werden relle Zahlen meistens als Dezimalbrüche, z.B. $\pi = 3.141592653589793\ldots$. Oder aber als ganze Zahlen, Brüche oder Symbole, wie z.B. $\sqrt{2}$.

1.8.1 Dezimalbrüche

Wir unterscheiden 3 Arten von Dezimalbrüchen:

Abbrechende Dezimalbrüche, wie z.B. 2.25. Abbrechende Dezimalbrüche sind immer rational, d.h. Element von $\mathbb{Q}$.

Periodische, nicht-abbrechende Dezimalbrüche, wie z.B. $0.33333\ldots = 0.\overline{3}$ oder $74.4213131313\ldots = 74.42\overline{13}$. Auch diese Dezimalbrüche sind immer rational.

Nicht-periodische, nicht-abbrechende Dezimalbrüche, wie z.B. $1.4142135623730951\ldots$ oder $0.101001000100001000001\ldots$ oder $1.2345678910111213141516\ldots$. Diese Dezimalbrüche sind **irrational**, d.h. nicht Element von $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 17 Beweisen Sie, dass abbrechende Dezimalbrüche immer rational sind (d.h. Element von $\mathbb{Q}$).

Aufgabe 18 Welcher Zahl entspricht $0.\overline{9}$?

Nicht-Abzählbarkeit von $\mathbb{R}$: Man kann zeigen, dass $\mathbb{R}$ nicht abzählbar ist. Es gibt in diesem Sinne also mehr reelle Zahlen als natürliche Zahlen. Oder präziser: $\mathbb{R}$ ist mächtiger als $\mathbb{N}$.

1.9 Darstellung von Zahlen im Computer

Zahlen werden im Computer im Zweiersystem dargestellt. Computer rechnen i.A. entweder mit ganzen Zahlen, oder mit Binärbrüchen (analog zu Dezimalbrüchen im Zweiersystem). Der Speicherplatz für eine Zahl ist normalerweise fix. D.h. der Computer kann nicht beliebig grosse und auch nicht beliebig genaue Zahlen speichern. Konkret heisst das, dass irrationale Zahlen (wie z.B. π oder $\sqrt{2}$ gar nicht exakt gespeichert werden können. Auch periodische Dezimalbrüche können nicht genau gespeichert werden, da nur eine begrenzte Anzahl Nachkommastellen gespeichert werden (typischerweise 53 Binärstellen, was etwa 17 Dezimalstellen entspricht).

Merke Computer können auch nicht rechnen

Computer können prinzipell nicht exakt rechnen und machen beim Rechnen mit Dezimalbrüchen praktisch immer Rundungsfehler. Allerdings sind diese Rundungsfehler in den meisten Fällen extrem klein und fallen nicht auf.

1.9.1 Exponentialschreibweise

In der Wissenschaft, wo oft sehr grosse oder sehr kleine Zahlen vorkommen, werden die Zahlen oft als eine Zahl zwischen 1.0 und 10 mal eine Zehnerpotenz geschrieben. Beispiele:

$$1234.56 = 1.23456 \cdot 10^3 \qquad 0.00000341 = 3.41 \cdot 10^{-6}$$

Genau in dieser Weise werden auf dem Computer die Zahlen gespeichert: Die *Mantisse* in der Form $x.abc\dots q$ und der *Exponent*. Beachten Sie, dass die Anzahl Stellen in der Mantisse konstant (und begrenzt) ist. Ebenso ist der Zahlenbereich für den Exponenten begrenzt.

Aufgabe 19 $\frac{1}{5000}$ kann auf einem Computer als Binärbruch nicht exakt dargestellt werden (analog zu $\frac{1}{3}$ im Dezimalsystem). Führen Sie folgende Berechnung auf einem Computer durch und stellen Sie sicher, dass Sie die grösstmögliche Anzahl Dezimalstellen anzeigen lassen (mindestens aber 20 Stellen):

$$\frac{1}{5000} + 1 - 1$$

Erklären Sie das Resultat anschaulich, wenn man $\frac{1}{5000}$ durch $\frac{1}{3000}$ ersetzt.

1.10 Binärzahlen (optional)

- Binärzahlen in $\mathbb{N}$.
- Binärzahlen in $\mathbb{Q}_0^+$
- Binärzahlen in $\mathbb{Z}$

Lösungen zu Aufgabe 14

a) $\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}+\frac{\frac{2}{3}}{4}} = \dfrac{\frac{8}{12}+\frac{9}{12}}{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}} = \dfrac{\frac{17}{12}}{\frac{1}{2}+\frac{2}{12}} = \dfrac{\frac{17}{12}}{\frac{6}{12}+\frac{2}{12}} = \dfrac{\frac{17}{12}}{\frac{8}{12}} = \dfrac{17}{\cancel{12}}\cdot\dfrac{\cancel{12}}{8} = \dfrac{17}{8}$

b) $\dfrac{2-\frac{4}{3}}{\frac{2}{\frac{3}{4}}+2} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{\frac{6}{3}-\frac{4}{3}}{\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}+2} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{3}+\frac{6}{3}} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{14}{3}} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{3}}\cdot\dfrac{\cancel{3}}{\cancel{14}_{7}} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{7} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{3}{21} - \dfrac{14}{21} = -\dfrac{11}{21}$

c) $\dfrac{\frac{8^2+6^2+5^2}{2\cdot(2^5-3^3)^2}}{\left(\frac{5}{4}\right)^3} = \dfrac{\frac{64+36+25}{2\cdot(32-27)^2}}{\frac{5^3}{4^3}} = \dfrac{125}{2\cdot(5)^2}\cdot\dfrac{4^3}{5^3} = \dfrac{\cancel{5^3}}{\cancel{2}\cdot 5^2}\cdot\dfrac{2^{\cancel{6}5}}{\cancel{5^3}} = \dfrac{32}{25}$

d) $-2-\dfrac{-2-\left(\frac{2}{3}\right)^2}{-\frac{2}{-\frac{-3}{-2}}} = -2-\dfrac{-2-\frac{4}{9}}{-\frac{2}{-\frac{3}{2}}} = -2-\dfrac{-2-\frac{4}{9}}{-2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)} = -2-\dfrac{-\frac{18}{9}-\frac{4}{9}}{\frac{4}{3}} = -2-\left(-\dfrac{\cancel{22}^{11}}{\cancel{9}_{3}}\right)\cdot\dfrac{\cancel{3}}{\cancel{4}_{2}} = -2-\left(-\dfrac{11}{6}\right) =$
$-\dfrac{12}{6}+\dfrac{11}{6} = -\dfrac{1}{6}$

e) $1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}} = 1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}} = 1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{\frac{3}{2}}} = 1+\dfrac{1}{1+\frac{2}{3}} = 1+\dfrac{1}{\frac{5}{3}} = 1+\dfrac{3}{5} = \dfrac{8}{5}$

f) $\dfrac{\left(\frac{117}{127}\right)^4}{\frac{117^3}{127^5}}\cdot\dfrac{\frac{1}{117}}{127} = \dfrac{117^4}{127^4}\cdot\dfrac{127^5}{117^3}\cdot\dfrac{1}{117}\cdot\dfrac{1}{127} = \dfrac{117^4\cdot 127^5}{127^4\cdot 117^3\cdot 117\cdot 127} = \dfrac{117^4\cdot 127^5}{127^5\cdot 117^4} = 1$