3 Kombinatorik: Die Kunst des Zählens

Wir beschäftigen uns im Folgenden mit der «abzählenden Kombinatorik».

> Diese beschäftigt sich mit der Bestimmung der Anzahl möglicher Anordnungen oder Auswahlen
>
> - unterscheidbarer oder nicht unterscheidbarer Objekte (d.h. „ohne“ bzw. „mit“ Wiederholung derselben Objekte) sowie
> - mit oder ohne Beachtung ihrer Reihenfolge (d.h. „geordnet“ bzw. „ungeordnet“).
>
> Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Abz%C3%A4hlende_Kombinatorik, 27. 9. 2019

Dafür gibt es eine Sammlung von Formeln. Der Fokus liegt aber darauf, diese Formeln intuitiv zu verstehen und von Fall zu Fall herleiten zu können. Nur so können dann auch komplexere Probleme erfolgreich gelöst werden.

3.1 Permutationen

Permutationen sind zwar ein Spezialfall. Wenn diese aber verstanden sind, können diese mit wenig Aufwand verallgemeinert werden.

Aufgabe 3.1

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 3-stellige Zahlen zu schreiben, in denen die Ziffern 1, 2, 3 je genau einmal vorkommen? Schreiben Sie alle Möglichkeiten systematisch auf.

b) Gleiche Frage mit 4-stelligen Zahlen und Ziffern 1, 2, 3, 4?

c) Wie viele Möglichkeiten gibt es 10 nummerierte Parkplätze 10 Mietern zuzuordnen?

d) Auf wie viele Arten können die Schülerinnen und Schüler einer Klasse mit n Personen durchnummeriert werden?

Definition 3.1 n-Fakultät: $n!$

Für $n \in \mathbb{N}$ definiert man die Fakultät von n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \qquad \text{(gesprochen } n\text{-Fakultät)}$$

mit dem Spezialfall 0!=1.

Hinweis: Auf Englisch bzw. Französisch spricht man von «n factorial» bzw. «n factorielle», was (zumindest für mich) mehr Sinn macht, als «Fakultät». Laut Wikipedia wird z.T. in Österreich der Begriff «die Faktorielle» verwendet.

Merke Anzahl Permutationen

Es gibt $n!$ verschiedene Permutationen (Vertauschungen) von n unterscheidbaren Objekten.
Bei einer Permutation ist die Reihenfolge der Objekte wichtig, die Objekte sind unterscheidbar und es gibt keine Wiederholungen.

Merke Zählstrategie

Kann man das Zählen der Möglichkeiten in einzelne Schritte zerlegen und ist die jeweilige Anzahl Möglichkeiten in jedem Schritt unabhängig von der effektiven Wahl in den vorhergehenden Schritten, können die entsprechenden Anzahlen einfach multipliziert werden.

Aufgabe 3.2 Erfinden Sie selbst eine Aufgabe, in der für die Lösung die Anzahl Permutationen berechnet werden muss.

3.2 Variationen ohne Wiederholung

Merke Lösungsstrategie

Es ist manchmal am einfachsten, «gleiche» Dinge mehrfach zu zählen (d.h. diese erst als unterschiedliche Dinge zu betrachten), und dann am Schluss durch die Anzahl Mehrfachzählungen zu dividieren.

Aufgabe 3.3

a) Wie viele unterschiedliche «Wörter» (d.h. auch völlig sinnfreie) können mit den Buchstaben vom Wort «SEEFAHREN» geschrieben werden?

b) Wie viele unterschiedliche «Wörter» (d.h. auch völlig sinnfreie) können mit den Buchstaben vom Wort «ANANAS» geschrieben werden?

c) 50 Personen nehmen an einer Tombola teil. Genau 5 davon gewinnen je einen unterschiedlichen Preis. Auf wie viele Arten können die 5 unterschiedlichen Preise verteilt werden?

Merke Aus n unterschiedlichen Objekten auf k Plätze

Aus n unterschiedlichen Objekten sind k in einer Reihe zu platzieren. Die Anzahl Möglichkeiten dafür beträgt:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+2) \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Merke n teilweise identische Objekte auf n Plätze

Sei k die Anzahl unterschiedlicher Objekte. Seien $m_1, m_2, \ldots, m_k$ die Anzahl Wiederholungen der Objekte (mit $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$). Die Anzahl unterschiedlicher Anordnungen der n Objekte ist:

$$\frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \ldots \cdot m_{k-1}! \cdot m_k!}.$$

Aufgabe 3.4

Wie viele Möglichkeiten gibt es, unterschiedliche «Wörter» der Länge 5 mit den Buchstaben «ABBCCCDDDD» zu schreiben?

Aufgabe 3.5 Vereinfachen Sie:

a) $\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}$

b) $\frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{1}{n+1!}$

c) $\frac{(2n)!}{(2n-1)!} \cdot \frac{(n-1)!}{n!}$

d) $\frac{2n}{n+1} \cdot \frac{n^2-1}{n!}$

3.3 Variationen mit Wiederholung

Aufgabe 3.6

a) Wie viele «Wörter» der Länge 5 kann man mit beliebig vielen der drei Buchstaben A, B, C schreiben?

b) Man würfelt 10 mal hintereinander. Wie viele mögliche Folgen von Wurfergebnissen gibt es?

Merke Variationen mit Wiederholung

Sind n Plätze (geordnet) mit k Objekten zu besetzen (wobei jedes Objekte beliebig viele Male vorkommen darf), gibt es dafür

$$k^n \text{ Möglichkeiten.}$$

3.4 Kombinationen ohne Wiederholung

Neben der Permutation ist die Kombination (ohne Wiederholung) der wichtigste Baustein.

Aufgabe 3.7

a) Aus einer Klasse von 25 Schülerinnen und Schülern soll eine Delegation von 3 Personen ausgewählt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine solche Delegation zu bilden?

b) Eine Münze wird 50 Mal geworfen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, genau 3 mal Kopf und 47 mal Zahl zu werden? Zum Vergleich gleiche Frage mit 25 mal Kopf und 25 mal Zahl. Wie viele Möglichkeiten gibt es insgesamt?

c) Wie viele möglichen «Hände» gibt es im Jass? (D.h. auf wie viele Arten kann man 9 Karten aus 36 auswählen?)

Merke n tief k

Die Anzahl Kombinationen, d.h. die Anzahl Möglichkeiten, aus n unterscheidbaren Objekten k auszuwählen, ohne die Reihenfolge zu berücksichtigen, ist

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!},$$

wobei $\binom{n}{k}$ als «n tief k» gelesen wird und als **Binomialkoeffizient** bezeichnet wird.
Auf Englisch wird sinnigerweise $\binom{n}{k}$ als «n choose k» gelesen.

3.4.1 Zum Namen «Binomialkoeffizient»

Wir betrachten im folgenden das Binom $(a+b)^n$ und dessen auspotenzierte Form:

$(a+b)^0$

$(a+b)^1$

$(a+b)^2$

$(a+b)^3$

$(a+b)^4$

$(a+b)^n$

Trägt man obrige Koeffizienten in einem Dreieck ein erhält man das sogenannte **Pascal'sche Dreieck**:

Aufgabe 3.8 Begründen Sie, warum ein Koeffizient immer die Summe der beiden oberen ist. *Hinweis: Beachten Sie, dass* $(a+b)^n = (a+b)^{n-1} \cdot (a+b)$ *ist.*

Aufgabe 3.9 Begründen Sie, warum der Koeffizient von $a^k b^{n-k}$ in der auspotenzierten Form von $(a+b)^n$ gleich $\binom{n}{k}$ ist.

3.4.2 Eigenschaften von $\binom{n}{k}$

Aufgabe 3.10 Beweisen Sie folgende Eigenschaften von Binomialkoeffizienten:

a) $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$ b) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ c) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Die schönsten Beweise sind natürlich jene, die möglichst anschaulich und einleuchtend sind. Man kann natürlich auch algebraisch verfahren.

3.5 Kombination mit Wiederholung

Die Formel zur Berechnung der Anzahl Kombinationen mit Wiederholung soll hier nur als Ausblick dienen.

Konkret geht es um die Anzahl mögliche Farbzusammenstellungen, wenn aus n Farben eine *ungeordnete* Gruppe von k Farben zusammengestellt werden soll, wobei jede Farbe mehrmals vorkommen kann.

Aufgabe 3.11 Gegeben sind 3 Farben R (rot), G (grün) und B (blau). Machen Sie ein komplette Liste aller möglichen ungeordneten Zusammenstellungen von 3 Farben, wobei sich die Farben wiederholen dürfen. Wie viele unterschiedliche Zusammenstellungen gibt es?

Aufgabe 3.12 Zur Herleitung der Formel der Anzahl Kombinationen mit Wiederholung für die Bildung von Gruppen der Grösse k aus n Objekten kann wie folgt vorgegangen werden:

Man platziert $n+k-1$ Streichhölzer in eine Reihe. Davon wählt man $n-1$ aus und markiert diese. Die Anzahl unmarkierter Streichhölzer zwischen den Rändern und den markierten Hölzern gibt die Anzahl an, wie oft jedes der n Objekte vorkommt.

Zeichnen Sie dazu ein Beispiel für die Aufgabe 3.11 und ein Beispiel für $n=4$ und $k=3$.

Merke

Die Anzahl Kombinationen mit Wiederholung, d.h. Anzahl Möglichkeiten bei k Ziehungen mit Zurücklegen aus n Objekten beträgt:

$$\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$$

Aufgabe 3.13 Beweisen Sie die Gleichung in der Merke-Box oben.

3.6 Übungsaufgaben

Folgende Aufgaben (3.14 bis 3.21) stammen aus dem Buch «Stochastik» der «DMK» und wurden von Andreas Meier, KSBG mit LaTeX gesetzt. Ihm sei herzlich gedankt.

Aufgabe 3.14 Siebenstellige Telefonnummern dürfen nicht mit einer 0 oder einer 1 beginnen.

a) Wie viele verschiedene siebenstellige Telefonnummern erfüllen diese Bedingung?

b) Jemand hat die Telefonnummer 523 46 87. Wie viele andere Telefonabonnenten könnten eine Telefonnummer mit genau denselben Ziffern haben?

c) Jemand hat die Nummer 523 23 23. Wie viele andere Telefonabonnenten können eine Telefonnummer mit genau denselben Ziffern haben?

d) In wie vielen siebenstelligen Telefonnummern kommt die Ziffer 1 mindestens zweimal vor?

Aufgabe 3.15

a) $P(23|14)$ ist ein Gitterpunkt im 1. Quadranten. Wie viele unterschiedliche kürzeste Gitterwege gibt es vom Ursprung $O(0|0)$ zu P?

b) Wie viele kürzeste Gitterwege gibt es vom Punkt $Q(3|6)$ zum Punkt $R(12|45)$?

c) $P(x|y)$ ist ein Gitterpunkt im 1. Quadranten: $x, y \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es $\binom{x+y}{x}$ kürzeste Gitterwege gibt, die vom Ursprung $O(0|0)$ zum Punkt P führen.

d) Wie viele kürzeste Wege von a) führen durch den Zwischenpunkt $Z(5|6)$?

Aufgabe 3.16 Aus einer Gruppe von 17 Schülern sollen fünf für ein Organisationskomitee ausgewählt werden. Wie viele Auswahlmöglichkeiten gibt es?

Aufgabe 3.17 An einem Velorennen nehmen zwölf Velofahrer teil. Wie viele verschiedene Zieleinläufe sind theoretisch möglich,

a) wenn alle Teilnehmer das Ziel erreichen?

b) wenn nur zehn der zwölf Teilnehmer das Ziel erreichen?

Aufgabe 3.18 Im Schweizer Zahlenlotto ging es 1986 - 2012 darum, diejenigen sechs von 45 Zahlen, die von einer Maschine gezogen werden, richtig vorherzusagen. Die Reihenfolge der Ziehung spielt dabei keine Rolle. Löse die folgenden Aufgaben für diese Version des Zahlenlottos.

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, sechs aus 45 Zahlen auszuwählen? Wie wahrscheinlich ist es demnach, alle sechs Zahlen richtig zu vorherzusagen?

b) Wie viele mögliche Vorhersagen gibt es, bei denen genau k Zahlen richtig sind ($k = 1, 2, ..., 5$)?

c) Wie wahrscheinlich ist es, dass 1 unter den sechs Zahlen ist, die von der Maschine gezogen werden? Ändert sich das Resultat, wenn man statt der 1 eine andere Zahl betrachtet?

Aufgabe 3.19 Fassen Sie zu einem einzigen Binomialkoeffizienten zusammen.

a) $\binom{7}{3} + \binom{7}{4}$ b) $\binom{5}{2} + \binom{5}{2}$ c) $\binom{6}{3} - \binom{5}{3}$ d) $\binom{10}{6} + \binom{9}{4}$

Aufgabe 3.20 Wie viele verschiedene Teiler hat die natürliche Zahl n?

a) $n = 3^8 \cdot 5^{11}$ b) $n = 4000$

c) $n = 2100$ d) $n = 10^m,\ m \in \mathbb{N}$

Aufgabe 3.21 Gegeben ist die Gleichung $x + y + z = 14$.

a) Wie viele Lösungen (x, y, z) hat diese Gleichung für den Fall, dass $x, y, z \in \mathbb{N}^\star$ (d.h. positive ganze Zahlen)?

b) Wie viele Lösungen hat diese Gleichung für $x, y, z \in \mathbb{N}_0$ (d.h. inklusive der Null)?

3.7 Repetionsaufgaben

Folgende Aufgaben (3.22 bis 3.25) stammen aus dem Buch «Stochastik» der «DMK» und wurden von Andreas Meier, KSBG mit LaTeX gesetzt. Ihm sei herzlich gedankt.

Aufgabe 3.22 Emma und Luca gehören zu einer Klasse mit 24 Schülerinnen und Schülern. Eine Siebenergruppe darf die Klasse bei einer kulturellen Veranstaltung vertreten.

a) Wie viele verschiedene Siebenergruppen können gebildet werden?

b) In wie vielen dieser möglichen Gruppen wäre Emma dabei?

c) In wie vielen Gruppen fehlt Luca?

d) Wie viele Gruppen gibt es, zu denen sowohl Emma als auch Luca gehören?

Aufgabe 3.23 Es sollen mit den Buchstaben des deutschen Alphabets sechsstellige Buchstabencodes mit vier Konsonanten und zwei Vokalen erstellt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es dazu, wenn die Vokale an der zweiten und fünften Position stehen sollen?

Aufgabe 3.24

a) Eine Klasse mit zehn Schülerinnen und zehn Schülern muss für den Halbklassenunterricht in zwei gleich grosse Gruppen aufgeteilt werden. Bei wie vielen Aufteilungen der Klasse sind in beiden Halbklassengruppen je gleich viele Schülerinnen und Schüler?

b) Die Parallelklasse hat zwölf Schülerinnen und zehn Schüler. Wie viele Aufteilungen in zwei gleich grosse Gruppen gibt es, wenn in beiden Gruppen die Anzahl Schülerinnen wie auch die Anzahl Schüler gleich gross sein soll?

Aufgabe 3.25 Eine Gruppe mit sieben Volleyballerinnen bezieht eine Hotelunterkunft. Es wurden zwei Doppelzimmer und ein Dreibettzimmer gebucht. Auf wie viele Arten können die reservierten Zimmer belegt werden, wenn Anja und Tanja keinesfalls im gleichen Zimmer untergebracht werden möchten? Wir gehen davon aus, dass die beiden Zweierzimmer unterscheidbar sind.

3.8 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: “If you want to nail it, you'll need it”.

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe 3.1 ex-permutationen-intro

a) 123, 132, 213, 231, 312, 321. 6 Möglichkeiten.

b) 1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, 2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431, 3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421, 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321. Total 24 Möglichkeiten.

c) 1. Parkplatz: 10 Möglichkeiten, 2. Parkplatz 9 M. etc. Also total $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 3'628'800$ Möglichkeiten.

d) Nummer 1: n Möglichkeiten, Nummer 2, $n-1$ Möglichkeiten etc. Total $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ Möglichkeiten.

Lösung zu Aufgabe 3.3 ex-variationen-ohne-intro

a) 9 Buchstaben, wobei das 'E' drei mal vorkommt. Wären die 'E' unterschiedlich, gäbe es 9! Wörter. Man zählt jetzt aber die Vertauschungen der 'E' mehrfach, und zwar genau 3! mal. Es gibt also total $\frac{9!}{3!} = 60'480$ Möglichkeiten.

b) 3 'A', 2 'N', 1 'S'. Wären alle Buchstaben verschieden, gäbe es 6! Möglichkeiten. Man hat aber 3! Vertauschungen der 'A' zu viel gezählt, und für jede dieser Vertauschungen 2! Vertauschen der 'N'. Es gibt also insgesamt $\frac{6!}{3! \cdot 2!} = 60$ Möglichkeiten.

c) 1. Preis, 50 Personen zur Auswahl, 2. Preis noch 49 etc. Total also $50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 = 254'251'200$ Möglichkeiten. Alternativ kann man 45 fiktive identische Preise hinzufügen. Dann hat man 50! Möglichkeiten, hat aber 45!-fach zu viel gezählt (für die Vertauschungen der fiktiven Preise). Also $\frac{50!}{45!}$.

Lösung zu Aufgabe 3.4 ex-variationen-telescope

Die Lösung ist 535.

Folgendes Ruby-Programm generiert alle möglichen Wörter:

```
def count(letters, multiplicity, length, doprint=true, prefix="")
        if prefix.size==length
                puts prefix if doprint
                return 1
        end
        res = 0
        letters.size.times{|i|
                if multiplicity[i]>0
                        multiplicity[i]-=1
                        res += count(letters, multiplicity, length, doprint, prefix+letters[i])
                        multiplicity[i]+=1
                end
        }
        return res
end
```

```
def strcount(string,length, doprint=true)
        allletters = string.split(//).sort
        letters = allletters.sort.uniq
        multiplicity = Array.new(letters.size){|i| allletters.count{|l| l==letters[i]}}
        return count(letters, multiplicity, length, doprint)
end

c = strcount("ABBCCCDDDD", 5)
puts "#{c} words in total"
```

Systematisch könnte man wie folgt vorgehen. Man notiert sich alle möglichen Häufigkeiten von Buchstaben und wie viele mögliche Zuordnungen von Buchstaben zu diesen Häufigkeiten es dafür gibt.

1,1,1,2 A ist gesetzt, für den doppelten Buchstaben gibt es 3 Möglichkeiten. Für jede dieser Möglichkeiten gibt es $\frac{5!}{2!} = 60$ Variationen, also total 180.

1,2,2 Ist 'A' der eine, gibt es 3 Möglichkeiten einen Buchstaben wegzulassen. Ist A nicht dabei, gibt es 3 Möglichkeiten, den alleine vorkommenden Buchstaben zu wählen. Es gibt für jede der 6 Möglichkeiten $\frac{5!}{2!\cdot 2!} = 30$ Variationen, also total 180.

1,1,3 Für den 3-fachen Buchstaben kann aus C und D ausgewählt werden. Danach gibt es noch je 3 Möglichkeiten, den fehlenden Buchstaben zu wählen. Total 6 Möglichkeiten mit je $\frac{5!}{3!} = 20$ Variationen, total also 120.

2,3 Für den 3-fachen Buchstaben kann aus C und D ausgewählt werden, für den 2-fachen bleiben noch 2 Buchstaben, also 4 Möglichkeiten mit je $\frac{5!}{3!\cdot 2!} = 10$ Variationen, also total 40.

1,4 D ist als 4-fach vorkommender Buchstabe gesetzt, für den anderen gibt es 3 Möglichkeiten mit je $\frac{5!}{4!} = 5$ Variationen, also total 15.

Alles zusammen $180 + 180 + 120 + 40 + 15 = 535$.

Eine andere Alternative ist zu zählen, welche Variationen nicht vorkommen können und diese von allen Möglichkeiten ohne Häufigkeitsbeschränkung abzuziehen.

Wenn alle Buchstaben bis zu 5 mal vorkommen dürfen, hat man pro «Stelle» 4 Möglichkeiten, total also $4^5 = 2^{10} = 1024$ Möglichkeiten.

Davon jetzt alle abzählen, wo mehr als 1 A, mehr als 2 B, mehr als 3 C oder 5 D vorkommen, scheint auch nicht viel einfacher zu sein.

2 'A': Es gibt $\frac{5\cdot 4}{2} = 10$ Plätze, die A zu platzieren, und $3^3 = 27$ Möglichkeiten, die restlichen Plätze mit B,C,D zu füllen, wobei aufzupassen ist, das man darunter auch eine Möglichkeit «AABBB» hat, die man wohl später noch einmal abzählt... Total 270.

3 'A': Es gibt (analog zu oben) 10 Möglichkeiten, die A nicht zu platzieren, und $3^2 = 9$ Möglichkeiten für die restlichen 2 Buchstaben. Total 90.

4 'A': 5 Plätze und 3 Möglichkeiten für den fünften Buchstaben. Total 15.

5 'A': Total 1 Möglichkeit.

Für 3 'B' ist jetzt auszuschliessen, dass man daneben noch 2 A hat, weil das oben schon berücksichtigt wurde.

Ich werde diesen Weg hier nicht weiter ausführen.

Lösung zu Aufgabe 3.5 ex-fakultaeten-kuerzen

a) $$\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n+1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n+2}{(n+1)!}$$

b) $$\frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{1}{n+1!} = (n+1) \cdot \frac{1}{n+1} = 1$$

c) $$\frac{(2n)!}{(2n-1)!} \cdot \frac{(n-1)!}{n!} = 2n \cdot \frac{1}{n} = 2$$

d) $$\frac{2n}{n+1} \cdot \frac{n^2-1}{n!} = \frac{2n}{n+1} \cdot \frac{(n+1)\cdot(n-1)}{n!} = 2n \cdot \frac{n-1}{n!} = \frac{2}{(n-2)!}$$

Lösung zu Aufgabe 3.6 ex-variation-mit-wiederholung

a) Für jede Position 3 Möglichkeiten, also total $3^5 = 243$.

b) Für jeden Wurf 6 Möglichkeiten, also total 6^{10} Möglichkeiten.

Lösung zu Aufgabe 3.7 ex-kombination-intro

a) Man bildet zuerst geordnete 3er-Gruppen, d.h. Variationen ohne Wiederholung. Man dividiert dann durch die Anzahl Mehrfachzählungen, also die Permutation der 3 Personen. Als Resultat: $\frac{25!}{22!} \cdot \frac{1}{3!} = \frac{25!}{22! \cdot 3!} = 2300$

b) Man betrachtet wieder erst die Variation ohne Wiederholung, d.h. auf wie viele Arten man 3 (vorerst unterscheidbare) Köpfe auf 50 Positionen verteilen kann. Danach dividiert man wieder durch die Anzahl Mehrfachzählungen, d.h. die Anzahl Permutation von 3 Objekten. Resultat: $\frac{50!}{47!} \cdot \frac{1}{3!} = \frac{50!}{47! \cdot 3!} = 19600$.

Bei 25 Köpfen sind es total $\frac{50!}{25! \cdot 25!} = 126'410'606'437'752 \approx 1.3 \cdot 10^{14}$ Möglichkeiten.

Insgesamt gibt es $2^{50} = 1'125'899'906'842'624 \approx 1.1 \cdot 10^{16}$ Möglichkeiten.

c) $\frac{36!}{27! \cdot 9!} = 94'143'280$ Möglichkeiten.

Lösung zu Aufgabe 3.10 ex-eigenschaften-binomialkoeffizient

a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$.

Variante algebraisch: Man potenziert das Binom $(1+1)^n$ aus und erhält so die Summe aller Binomialkoeffizienten mit fixem n.

Variante kombinatorisch: Man betrachtet alle Variationen mit Wiederholung für die Besetzung von n geordneten Plätzen mit Nullen und Einsen. Davon gibt es 2^n. Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ gibt an, wie viele davon genau k Nullen haben (d.h. auf wie viele Arten man k Plätze für die Nullen auswählen kann). Die Summe aller dieser Möglichkeiten muss also 2^n sein.

b) $\displaystyle\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Variante algebraisch:

$$\frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} = \frac{n! \cdot (k+1)}{(n-k)!(k+1)!} + \frac{n! \cdot (n-k)}{(n-k)!(k+1)!} = \frac{n! \cdot (k+1+n-k)}{((n+1)-(k+1))! \cdot (k+1)!} = \frac{(n+1)!}{((n+1)-(k+1))! \cdot (k+1)!} = \binom{n+1}{k+1}$$

Variante kombinatorisch:

Um $k+1$ Elemente aus $n+1$ auszuwählen, können wir zwei Gruppen von Kombinationen unterscheiden: Jene, die das letzte Element enthalten, und jene, die es nicht enthalten.

Für diejenigen, die das letzte Element enthalten, müssen von den n verbleibenden Elementen noch k Elemente ausgewählt werden. Dafür gibt es $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten.

Für diejenigen, die das letzte Element nicht enthalten, müssen von den n verbleibenden Elementen $k+1$ Elemente ausgewählt werden. Dafür gibt es $\binom{n}{k+1}$ Möglichkeiten.

c) Variante algebraisch:

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}$.

Variante kombinatorisch:

Wählt man k Objekte aus n aus, hat man damit automatisch auch $n-k$ Objekte nicht ausgewählt. Dafür gibt es natürlich gleich viele Möglichkeiten.

Lösung zu Aufgabe 3.11 ex-kombination-mit-wiederholung
Drei gleiche Farben: RRR, GGG, BBB
Zwei gleiche Farben: RRG, RRB, GGR, GGB, BBR, BBG
Unterschiedliche Farben: RGB
Total 10 Möglichkeiten.

Lösung zu Aufgabe 3.14 ex-varohne-telefonnummern

a) Für die erste Ziffer gibt es 8 Möglichkeiten, für die restlichen sechs Ziffern jeweils 10 Möglichkeiten: $8 \cdot 10^6 = 8'000'000$.

b) $7! - 1 = 5039$

c) $\frac{7!}{3! \cdot 3!} - 1 = 139$

d) Man berechne, in vielen Nummern keine und in wie vielen Nummern genau eine 1 vorkommt und ziehe dies von der Anzahl aller möglichen Nummern ab: $8'000'000 - \underbrace{8 \cdot 9^6}_{\text{keinmal}} - \underbrace{8 \cdot 6 \cdot 9^5}_{\text{einmal}} = 914'120$. *Für genau eine Eins gibt es 8 Möglichkeiten für die erste Ziffer, 6 Möglichkeiten die 1 zu platzieren, und* 9^5 *Möglichkeiten, die restlichen Ziffern zu wählen.*

Lösung zu Aufgabe 3.15 ex-combohne-wege-im-gitternetz

a) $\binom{37}{14} = 6'107'086'800$

b) $\binom{48}{9} = 1'677'106'640$

c) Ein kürzester Weg von $O(0|0)$ nach $P(x, y)$ besteht aus x horizontalen Abschnitten, die jeweils um eine Einheit nach rechts gehen und y vertikalen Abschnitten, die jeweils um eine Einheit nach oben verlaufen. Wenn ein nach rechts verlaufener horizontaler Abschnitt mit H bezeichnet wird und ein vertikal nach oben mit V, kann ein kürzester Weg wie folgt codiert werden: HHVVVHVH...VHVHH.

Dieser Weg führt also zuerst zwei Schritte nach rechts, dann drei Schnitte nach oben, dann nach rechts, wieder nach oben usw. Das Zeichen H kommt in dieser Zeichenkette x-mal vor, das Zeichen V genau y-mal. Da ein solcher Weg aus total $x + y$ Abschnitten besteht, wird sein Code aus $x + y$ Zeichen gebildet.

Ein solcher Weg-Code ist eine Kombination, denn er ist bestimmt, sobald wir wissen an welchen der $x+y$ möglichen Positionen im Code das Symbol H steht. Für H müssen x Stellen aus den $x + y$ möglichen Positionen ausgewählt werden, was auf exakt $\binom{x+y}{x}$ Arten möglich ist: $\binom{x+y}{x} = \frac{(x+y)!}{x! \cdot y!}$.

d) Die Anzahl Wege über Z ist $\binom{11}{5} \cdot \binom{26}{8} = 721'771'050$.

Lösung zu Aufgabe 3.16 ex-komb-komitee
$\binom{17}{5} = \frac{17!}{5! \cdot 12!} = 6188$

Lösung zu Aufgabe 3.17 ex-perm-varohne-zieleinlaeufe

a) $12! = 479'001'600$

b) $\frac{12!}{2!} = 239'500'800$

Lösung zu Aufgabe 3.18 ex-combohne-altes-ch-lotto

Die Reihenfolge der Ziehung spielt keine Rolle.

a) $\binom{45}{6} = 8'145'600 \qquad P = \frac{1}{8'145'600} \approx 0.000\,01\,\%$

b) Es müssen k Zahlen aus den sechs gezogenen Zahlen und $(6-k)$ Zahlen aus den restlichen 39 Zahlen gezogen werden:

$$\begin{array}{lll}
n=0 & \binom{39}{6}\cdot\binom{6}{0} = 3'262'623 & P = \frac{3'262'623}{8'145'600} \approx 40.1\,\% \\
n=1 & \binom{39}{5}\cdot\binom{6}{1} = 3'454'542 & P = \frac{3'454'542}{8'145'600} \approx 42.4\,\% \\
n=2 & \binom{39}{4}\cdot\binom{6}{2} = 1'233'765 & P = \frac{1'233'765}{8'145'600} \approx 15.1\,\% \\
n=3 & \binom{39}{3}\cdot\binom{6}{3} = 182'780 & P = \frac{182'780}{8'145'600} \approx 2.2\,\% \\
n=4 & \binom{39}{2}\cdot\binom{6}{4} = 11'115 & P = \frac{11'115}{8'145'600} \approx 0.14\,\% \\
n=5 & \binom{39}{1}\cdot\binom{6}{5} = 234 & P = \frac{234}{8'145'600} \approx 0.003\,\%
\end{array}$$

c) $P = \frac{\binom{44}{5}}{\binom{45}{6}} = \frac{2}{15} \approx 13.33\,\%$. Das Resultat bleibt gleich.

Lösung zu Aufgabe 3.19 ex-binoialkoeffizienten-zusammenfassen

Für diese Aufgaben werden die bereits bewiesenen Formeln (i) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ und (ii) $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$ benötigt.

a) (ii): $\binom{7}{3} + \binom{7}{3} = \binom{8}{4}$

b) (i): $\binom{5}{2} = \binom{5}{3}$ und mit (ii): $\binom{5}{2} + \binom{5}{3} = \binom{6}{3}$

c) Mit (ii): $\binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k} - \binom{n-1}{k}$ gilt $\binom{6}{3} - \binom{5}{3} = \binom{5}{2}$

d) Mit (ii): $\binom{n-1}{k} = \binom{n}{k} - \binom{n-1}{k-1}$ gilt $\binom{10}{6} + \binom{9}{4} = \binom{10}{6} + \binom{9}{5} = \binom{9}{6}$

Lösung zu Aufgabe 3.20 ex-varmit-anzahl-teiler

a) Jeder Teiler von $n = 3^8 \cdot 5^{11}$ hat die Form $3^a \cdot 5^b$, wobei $a, b \in \mathbb{N},\ a \leq 8,\ b \leq 11$. a kann somit $(8+1)$ verschiedene Werte annehmen, b kann $(11+1)$ verschiedene Werte annehmen. Somit besitzt die Zahl $n = 3^8 \cdot 5^{11}$ genau $(8+1)\cdot(11+1) = 108$ unterschiedliche natürliche Teiler.

b) $4000 = 2^5 \cdot 5^3$. Somit ist die Anzahl natürlicher Teiler $(5+1)\cdot(3+1) = 24$.

c) $2100 = 7 \cdot 5^2 \cdot 3 \cdot 2^2$. Somit ist die Anzahl natürlicher Teiler $(1+1)\cdot(2+1)\cdot(1+1)\cdot(2+1) = 36$.

d) $10^m = 2^m \cdot 5^m$. Somit ist die Anzahl natürlicher Teiler $(m+1)^2$

Lösung zu Aufgabe 3.21 ex-anzahl-natuerliche-loesungen-einer-gleichung

a) Wenn in $1+1+...+1 = 14$ zwei der dreizehn Pluszeichen „gelöscht“ werden, erhalten wir eine mögliche Lösung. Daraus folgt die Anzahl Lösungen insgesamt: $\binom{13}{2} = 78$.

b) Werden bei einer Reihe von vierzehn 1 zwei Trennstriche eingefügt, können Lösungen in $\mathbb{N}_0$ dargestellt werden. Auf sechzehn Plätze werden also zwei Trennstriche eingefügt: $\binom{16}{2} = 120$.

Lösung zu Aufgabe 3.22 ex-comb-schuelerauswaehlen-mit-bedingungen

a) $\binom{24}{7} = 346'104$

b) Wenn Emma dabei ist, müssen noch sechs Mitglieder aus den verbleibenden 23 ausgewählt werden: $\binom{23}{6} = 100'947$.

c) Wenn Luca nicht dabei sein soll, stehen nur 23 Personen zur Auswahl: $\binom{23}{7} = 245'157$.

d) Luca und Emma sind dabei, es müssen noch fünf gewählt werden: $\binom{22}{5} = 26'334$.

Lösung zu Aufgabe 3.23 ex-varohne-woerter-mit-bedingungen
Es gibt 21 Konsonanten und 5 Vokale, die auf die Plätze zu verteilen sind: $21 \cdot 5 \cdot 21 \cdot 21 \cdot 5 \cdot 21 = 4'862'025$.

Lösung zu Aufgabe 3.24 ex-combohne-mit-bedingungen-halbklassen-bilden

a) Wähle fünf aus zehn Schülerinnen und fünf aus zehn Schülern:
$\binom{10}{5} \cdot \binom{10}{5} = \binom{10}{5} \cdot \binom{10}{5} = 63'504$.

b) Wähle sechs aus zwölf Schülerinnen und fünf aus zehn Schülern:
$\binom{12}{6} \cdot \binom{10}{5} = \binom{12}{6} \cdot \binom{10}{5} = 232'848$.

Lösung zu Aufgabe 3.25 ex-comb-personen-in-zimmer-verteilen
Es wird davon ausgegangen, dass die beiden Zweierzimmer unterscheidbar sind.
Ohne Einschränkungen gibt es $\binom{7}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{3} = P_7(2,2,3) = 210$ mögliche Zimmerbelegungen (Multiplikation der Möglichkeiten, das erste, zweite Zweierzimmer und dann das Dreierzimmer zu belegen.
Sind Anja und Tanja beide im ersten Zwierzimmer, gibt es $\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{3} = 10$ mögliche Zimmerbelegungen. Sind die beiden im zweiten Zweierzimmer, gibt es ebenfalls 10 Möglichkeiten.
Sind die beiden im Dreierzimmer gibt es $\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1} = 30$ mögliche Belegenungen. Somit gibt es total $210 - 20 - 30 = 160$ mögliche Zimmerbelegungen, in denen Anja und Tanja nicht im gleichen Zimmer schlafen.