# 2 Extremalaufgaben

Der Fokus bei Extremalaufgaben liegt auf der Modellierung, d.h. der Umsetzung eines beschreibenden Texts in eine präzise mathematische Formulierung. Ist die Formulierung abgeschlossen, kann die Aufgabe fast vollständig automatisiert gelöst werden. Z.B. mit dem CAS-fähigen Taschenrechner oder einem beliebigen CAS-Programm. (CAS steht für «Computer Algebra System» und bezeichnet Software, die symbolische mathematische Ausdrücke verarbeiten und manipulieren kann, wie z.B. Gleichungen lösen, ableiten, usw.)

## 2.1 Einsatz des TR

Der Taschenrechner kann auch ableiten. Dabei muss jeweils angegeben werden, nach welcher Variablen abgeleitet werden soll. Das ist in der Mittelschulmathematik fast immer $x$, in der Physik meistens $t$.

Der Befehl zum Ableiten kann im Calculator über $\boxed{\text{menu}}$, Analysis: $\boxed{4}$, Ableiten: $\boxed{1}$ erreicht werden.

Beispiel: $\boxed{\frac{d}{dx}\left(2\cdot x^3\right)}$ liefert $6x^2$. (Eigentlich sollten die «d» gerade und nicht kursiv gesetzt werden).

Die 3. Ableitung kann mit $\boxed{\frac{d^3}{dx^3}\left(2\cdot x^3\right)}$ berechnet werden. Dazu nach dem Einfügen der Ableitungsvariablen das Hochzeichen $\boxed{\hat{}}$ drücken.

⚠ $\frac{d}{dx}$ ist ein Operator und nicht etwa ein Bruch! Also immer via $\boxed{\text{menu}}$ $\boxed{4}$ $\boxed{1}$ eingeben.

**Merke** Der Infinitesimal-Operator d

In der Notation
$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$$
steht das «d» für eine infinitesimale Differenz, d.h. eine von Null verschiedene «Zahl», die aber kleiner als jede reelle Zahl ist. Damit ist «d» keine reelle Zahl. Die Notation kommt vom Differenzenquotienten:
$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x).$$

Nullstellen einer Funktion (z.B. $f(x) = x^3 - x$) können mit $\boxed{\texttt{zeros}(x^3-x, x)}$ bestimmt werden. Das zweite $x$ gibt an, nach welcher Variable die Gleichung gelöst werden soll. Der Vorteil von `zeros` gegenüber `solve` ist, dass man eine Liste erhält, die danach weiterverarbeitet werden kann. Z.B. können in diesen Punkten die Ableitungen ausgewertet werden.

### 2.1.1 Kurvendiskussion mit dem TR

**Funktion speichern** Z.B. mit $\boxed{\frac{1}{x^2+1} \to f1(x)}$. Der Vorteil von $f1$ ist, dass so die erste Funktion im Graph-Window definiert wird und somit gleich gezeichnet werden kann.

**Ableitungen speichern** $\boxed{\frac{d}{dx}f1(x) \to f2(x)}$ und $\boxed{\frac{d}{dx}f2(x) \to f3(x)}$.

**Nullstellen bestimmen** $\boxed{\texttt{zeros}(f1(x), x) \to ns}$ speichert die Nullstellen von $f(x)$ in der Variablen `ns`. Analog dazu werden die Nullstellen von $f2$ in `es` (Extremalstellenkandidaten) gespeichert und die Nullstellen von $f3$ in `ws` (Wendestellenkandidaten) gespeichert.

**Steigungen bestimmen** $\boxed{f2(ns)}$ und $\boxed{f2(ws)}$ liefern die Steigungen in den Null- und Wendestellen.

**$y$-Koordinaten bestimmen** $\boxed{f1(es)}$ und $\boxed{f1(ws)}$ liefern die $y$-Koordinaten der Extremal- und Wendestellen.

⚒ **Aufgabe 2.1** Lösen Sie die Aufgabe 2.2 a) mit dem TR.

### 2.1.2 Automatisieren der Kurvendiskussion

Der obige Ablauf kann einmal eingegeben und konfiguriert werden. Danach muss nur noch die Funktion geändert werden, der Rest ist automatisch.
**Vorgehen:**

**Neues Dokument** Home, Neues Dokument: 1, Notes hinzufügen: 6.

**Speichern** doc, Datei: 1, Speichern (oder speichern unter) 4 oder 5. Dateiname «kurvendiskussion».

**Schritte einfügen** Cursor platzieren, menu, Einfügen: 3, MathBox: 1. Jeder Berechnungsschritt muss jeweils in einer MathBox sein. Für die Mathematik-Befehle geben Sie jeweils menu, 6 ein.

**Graph Window hinzufügen** doc, Einfügen: 4, Graphs: 4.

**Graphen aktivieren** menu, 3, 1, Pfeile nach oben, mit Enter die Funktionen aktivieren.

**Graphen formatieren** menu, 1, 4. Vorschlag: f1 fetter, f2 gepunktet, f3 gestrichelt.

**Testen** Funktionsdefinition am Anfang ändern, alle Daten sollten sich automatisch anpassen, inklusive der Graphen.

**Speichern** Siehe oben.

Soll eine Funktion diskutiert werden, kann das Dokument «kurvendiskussion» geöffnet und die zu diskutierende Funktion eingetragen werden.

**Aufgabe 2.2** Bestimmen Sie die Nullstellen, Extremalstellen und Wendestellenkandidaten folgender Funktionen. Bestimmen Sie die Art der Extremalstellen mit der zweiten Ableitung. Berechnen Sie in den Nullstellen und Wendestellenkandidaten zusätzlich die Tangentensteigung des Funktionsgraphen.
Machen Sie eine Tabelle mit den «interessanten» $x$-Werten und den entsprechenden Funktions- und Ableitungswerten an diesen Stellen. Skizzieren Sie am Schluss mit den errechneten Daten den Funktionsgraphen, d.h. tragen Sie zuerst die errechneten Punkte mit den entsprechenden Tangenten ein.

a) $f(x) = (x+1)\cdot x\cdot(x-1)$

b) $f(x) = \frac{5x}{x^2+1} - \frac{1}{2}x$

c) $f(x) = \ln\left(1+x^2\right)$

d) $f(x) = -\frac{1}{20}(x+2)(x-2)^2(x-4)$

**Aufgabe 2.3** Skizzieren Sie jeweils die Graphen der Funktion $f$ (inklusive Tangenten) anhand folgender Resultate einer Kurvendiskussion. Bei Aufgaben b) und d) fehlen Einträge. Wie könnten diese aussehen und warum?

a)

| $x$ | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=f(x)$ | -3 | 0 | 1 | 0.5 | 0 | 1 |
| $f'(x)$ | 5 | 2 | 0 | -1 | 0 | 1 |
| $f''(x)$ | 0 | -1 | -1 | 0 | 1 | 0 |
| $f'''(x)$ | 3 | 2 | 2 | 3 | -2 | -1 |

b)

| $x$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y=f(x)$ | -2 | 0 | 1 | 2 | 2.5 |
| $f'(x)$ | 0 | 3 | 0.5 | 2 | 0 |
| $f''(x)$ | 2 | 0 | 0 | 0 | -2 |
| $f'''(x)$ | 0 | 3 | 2 | -1 | 2 |

c)

| $x$ | -2 | -1 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $y=f(x)$ | 2 | 0 | -1 | 0 |
| $f'(x)$ | -4 | -1 | 0 | 3 |
| $f''(x)$ | 0 | 2 | 1 | 2 |
| $f'''(x)$ | 1 | 0 | 0 | 1 |

d)

| $x$ | -2 | 0 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $y=f(x)$ | 0 | 2 | 1 | 0 |
| $f'(x)$ | 2 | 0 | 0 | -2 |
| $f''(x)$ | -1 | -1 | 0 | -3 |
| $f'''(x)$ | -1 | 1 | 1 | 2 |

## 2.2 Extremalaufgaben

In Extremalaufgaben ist eine (oder mehrere) Grösse(n) so zu bestimmen, dass eine andere Grösse möglichst gross oder klein wird. Als Beispiel ist die Höhe (und Radius) einer Büchse mit 1 l Volumen zu bestimmen, die eine möglichst kleine Oberfläche (Metallverbrauch) hat.

Das Vorgehen ist folgendes: Man bestimmt eine **Stellgrösse** (hier die Höhe), aus der die **Zielgrösse** (hier die Oberfläche) mit Hilfe der **Nebenbedingung** (Inhalt 1 l) berechnet werden kann. Man erhält so eine Funktion, von der man das Maximum oder Minimum sucht.

Oft ist die Stellgrösse zusätzlich eingeschränkt (hier z.B. muss die Höhe positiv sein), was den Definitionsbereich der Funktion ergibt. Das gesuchte Minimum oder Maximum kann also auch auf dem Rand des Definitionsbereichs liegen. Dies ist durch Auswerten der Funktion zu überprüfen.

⚒ **Aufgabe 2.4** Welche Höhe und welchen Radius hat eine Büchse mit 1 l Volumen und minimaler Oberfläche?

**Stellgrösse**: $h$ (Höhe) in dm
**Zielgrösse**: $O = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$ in $\text{dm}^2$
**Nebenbedingung**: $V = 1\ \text{dm}^3$ mit $V = h \cdot \pi r^2$.

Aus der Nebenbedingung erhalten wir $r =$ .

Und damit $O(h) =$

Wir suchen jenes $h$, das zu minimaler Oberfläche führt. Dazu leiten wir nach $h$ ab und setzen dann Null (horizontale Tangente):

✎

Der Rand des Definitionsbereichs kann ignoriert werden. Geht $h$ gegen Null, wächst $r$ und damit $O$ beliebig.

Mit der zweiten Ableitung könnte überprüft werden, dass es sich wirklich um ein Minimum handelt. Betrachtet man die Funktion $O(h)$ für sehr grosse $h$, sieht man, dass die Funktion ungefähr linear anwächst (der Term $\frac{2}{h}$ wird beliebig klein).

Zum Vergleich: Oberfläche eines Würfels mit 1 l Inhalt: ✎ .

Kugel mit 1 l Inhalt: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ und $O = 4\pi r^2$. Also $r =$

⚒ **Aufgabe 2.5** Welche Höhe und Radius hat eine Büchse mit 1 l Volumen und minimaler Oberfläche? Lösen Sie die Aufgabe mit $r$ (anstatt $h$) als Stellgrösse.

### 2.2.1 Vereinfachungen beim Bestimmen von Extremalstellen

Sei $f(x)$ eine Funktion, von der man Extremalstellen bestimmen möchte. Bevor man ableitet und die Ableitung Null setzt, kann es sich lohnen, die Funktion durch eine andere zu ersetzen, um die Berechnungen zu vereinfachen. Folgende Funktionen haben dieselben Extremalstellen:

$g(x) = c \cdot f(x)$ für $c \in \mathbb{R}^+$ und $g(x) = f(x) + c$ für $c \in \mathbb{R}$.

$g(x) = (f(x))^2$ und $g(x) = \sqrt{f(x)}$ wenn $f(x) \geq 0$ auf dem betrachteten Definitionsbereich. Dies ist speziell bei Abstandsproblemen interessant, da das Quadrat des Abstands oft eine einfachere Form hat.

**Merke** Abstand Punkt-Kurve

Der Abstand von einem Punkt $P$ zu einer Kurve $c$ ist definiert als der kleinste Abstand aller Abstände der Punkte $C$ auf $c$ zum Punkt $P$.

**Aufgabe 2.6** Berechnen Sie den Abstand folgender Parabeln zum Ursprung. Skizzieren Sie jeweils die Parabeln von Hand und schätzen Sie damit den Abstand ab. *Hinweis: Berechnen Sie den Scheitelpunkt der Parabel mit Hilfe des Extremums der Parabel.*

Programmieren Sie diesen Typ von Aufgabe auf dem TR. Entweder als neues Dokument oder als weiteres «Problem» im Dokument «kurvendiskussion».

a) $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2 + 1$

b) $f(x) = -\frac{1}{4}(x-1)^2 - 1$

c) $f(x) = x^2 - 2x - 2$

d) $f(x) = -x^2 + x + 2$

**Aufgabe 2.7** *Folgende Aufgaben sind aus dem «Mathematik-Repetitorium für den Maturastoff» der Fachgruppe Mathematik der Kantonsschule am Burggraben, St.Gallen.*

a) Aus einem Drahtstück der Länge $L = 180$ cm soll das Drahtmodell eines Quaders geformt werden, der viermal so lang wie breit ist und dessen Volumen maximal werden soll.

b) Einem gleichseitigen Dreieck mit der Seite $a = 7$ cm ist ein Parallelogramm mit maximalem Inhalt einzubeschreiben, das mit dem Dreieck einen Winkel gemeinsam hat.

c) Im Intervall $[0, \pi]$ soll dem Graphen von $f(x) = 3 \cdot \sin(x)$ ein Rechteck $ABCD$ so einbeschrieben werden, dass die Strecke $AB$ auf der $x$-Achse und die Punkte $C$, $D$ auf dem Graphen von $f$ liegen und der Umfang maximal ist.

d) Welcher Punkt auf der Parabel $p$: $y = \frac{1}{2}x^2$ hat den kleinsten Abstand vom Punkt $P = (6, 0)$?

**Aufgabe 2.8** Ziel ist es, die Kurve $h(x)$ (Hüllkurve genannt) zu bestimmen, die bei einem Fadenbild entsteht. *Die Lage ist hier so gewählt, dass die Kurve tatsächlich auch durch einen Funktionsgraphen beschrieben werden kann.*

a) Fertigen Sie folgende Skizze an: Einheit 4 Häuschen, zwei Strecken $s_f$ von $A = (-2, 1)$ zu $B = (0, -1)$ und $s_g$ von $B = (0, -1)$ zu $C = (2, 1)$. Auf diesen Strecken tragen Sie je 9 Punkte mit gleichem Abstand ein, jeweils auf Häuschenschnittpunkten. Verbinden Sie dann $(-2, 1)$ mit $(0, -1)$, $(-1.75, 0.75)$ mit $(0.25, -0.75)$, $(-1.5, 0.5)$ mit $(0.5, -0.5)$ usw. um das Fadenbild zu erhalten. Diese Geraden werden im folgenden «Fadengeraden» genannt.

b) Sei $t$ ein Parameter in $[0, 1]$. Damit sollen die Koordinaten der Punkte auf der Strecke $s_f$ beschrieben werden. Bestimmen Sie dazu zwei Funktionen $f_x(t)$ und $f_y(t)$, die die Koordinaten von Punkten auf $s_f$ liefern, und zwar so, dass man für $t = 0$ den Punkt $A = (f_x(0), f_y(0))$ und für $t = 1$ den Punkt $B = (f_x(1), f_y(1))$ erhält. *Hinweis: Skizzieren Sie dazu erst die Graphen der Funktionen $f_x(t)$ und $f_y(t)$.*

c) Bestimmen Sie analog dazu für die Strecke $s_g$ zwei Funktionen $g_x(t)$ und $g_y(t)$, so dass $B = (g_x(0), g_y(0))$ und $C = (g_x(1), g_y(1))$.

d) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $\ell(x)$ der zweiten eingezeichneten «Fadengeraden» von $(-1.75, 0.75)$ zu $(0.25, -0.75)$. Welchem Wert von $t$ entspricht diese Gerade?

e) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden durch die allgemeinen Punkte $P = (p_x, p_y)$ und $Q = (q_x, q_y)$.

f) Für ein allgemeines $t$, bestimmen Sie die Funktionsgleichung $k_t(x)$ für die «Fadengerade», die dem Parameter $t$ entspricht (d.h. die Funktionsgleichung jener Geraden, die durch die Punkte $(f_x(t), f_y(t))$ und $(g_x(t), g_y(t))$ geht. Bringen Sie die Funktion auf die Form «$x$ mal Polynom in $t$ plus faktorisiertes Polynom in $t$».

g) Ein Punkt $(x_p, y_p)$ auf der Hüllkurve (mit $y_p = h(x_p)$) liegt auf jener «Fadengeraden» $k_t(x)$, die an der Stelle $x_p$ das grösste $y_p$ hat. Für $x_p = 1$ bestimmen Sie jenen $t$-Wert, für den die Funktion $k_t(1)$ den grössten Wert liefert und bestimmen Sie diesen Wert. Damit haben Sie einen Punkt der Hüllkurve bestimmt.

h) Für einen allgemeinen Wert $x_p$ bestimmen Sie jenen $t$-Wert, für den $k_t(x_p)$ maximal ist. Bestimmen Sie so den zugehörigen Wert $y_p$. Damit ist $h$ bestimmt mit $h(x_p) = y_p$.

i) Wie interpretieren Sie die Funktion $h$ für $x$-Werte ausserhalb von $[-2, 2]$? Macht das geometrisch Sinn?

## 2.3 Ableitungen trigonometrischer Funktionen

**Aufgabe 2.9** Ein Punkt $P$ bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit von 1 Einheit pro Sekunde auf dem Einheitskreis.

a) Machen Sie eine Skizze der Situation.

b) Wie lange braucht der Punkt für eine Umdrehung?

c) Wenn der Punkt $P$ zur Zeit $t = 0$ bei $(1, 0)$ ist, welches sind die Koordinaten vom Punkt $P$ zur allgemeinen Zeit $t$?

d) Die Geschwindigkeit ist eigentlich ein Vektor (deren Betrag in unserem Fall konstant 1 ist). Für $t \approx 1$ zeichnen Sie $P$ und den zugehörigen Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ ein.

e) Was müssen die Komponenten von $\vec{v}$ sein?

f) Was sind also die Ableitungen der Funktionen $\cos(\alpha)$ und $\sin(\alpha)$?

**Merke** Ableitungen von $\cos(x)$ und $\sin(x)$

Für das Argument $x$ im **Bogenmass** gilt:

$\cos'(x) =$ $\sin'(x) =$

**Aufgabe 2.10** Bestimmen Sie die Ableitung von $\tan(x)$.

**Aufgabe 2.11** Repetition mit dem Buch. Theorie ab Seite 130, Zusammenfassung Seite 145. Übungen ab Seite 146.

Als Repetition sind folgende Aufgaben aus dem Buch auf Seiten 147 und 148 vorgeschlagen:

22, 23, 25, 26, 28, 29.

## 2.4 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

**Lösung zu Aufgabe 2.2** ex-extremalstellen-bestimmen

a) **Nullstellen**: $0 = f(x) = (x-1)\,x\,(x+1)$
$x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$

**Ableitung** $f'(x) = x\,(x+1) + (x-1)\,(x+1) + (x-1)\,x = 3\,x^2 - 1$

**Nullstellen der Ableitung**: $x_4 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_5 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Zweite Ableitung $f''(x) = 6\,x$

Nullstellen der zweiten Ableitung und mögliche Wendestellen: $x_6 = 0$

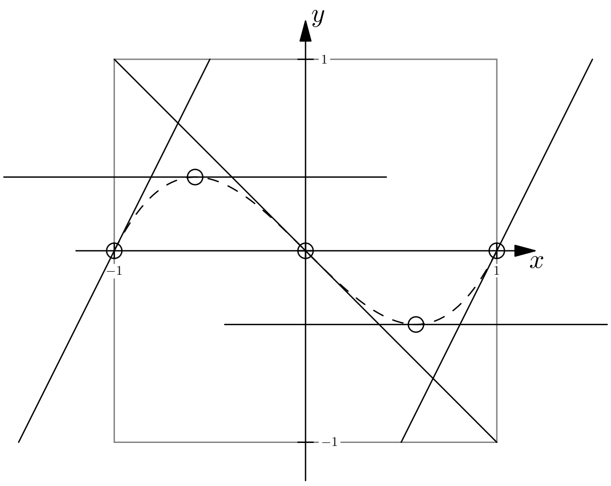
Interessante Stellen:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-1$ | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $0$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $1$ |
| $x$ | $-1.0000$ | $-.5773$ | $0.0000$ | $.5773$ | $1.0000$ |
| $f(x)$ | $0.0000$ | $.3849$ | $0.0000$ | $-.3849$ | $0.0000$ |
| $f'(x)$ | $2.0000$ | $.0000$ | $-1.0000$ | $.0000$ | $2.0000$ |
| $f''(x)$ | $-6.0000$ | $-3.4641$ | $0.0000$ | $3.4641$ | $6.0000$ |

Extrema:

$x_4 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \approx -.5773$, $f(x_4) = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}{3^{\frac{3}{2}}} \approx .3849$: $f'' < 0$, Maximum

$x_5 = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx .5773$, $f(x_5) = -\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}{3^{\frac{3}{2}}} \approx -.3849$: $f'' > 0$, Minimum



b) **Nullstellen**: $0 = f(x) = \frac{5\,x}{x^2+1} - \frac{x}{2}$
$x_1 = -3,\ x_2 = 3,\ x_3 = 0$

**Ableitung** $f'(x) = \frac{5}{x^2+1} - \frac{10\,x^2}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{2} = -\frac{x^4+12\,x^2-9}{2\,(x^2+1)^2}$

**Nullstellen der Ableitung**: $x_4 = -\sqrt{3}\,\sqrt{\sqrt{5}-2},\ x_5 = \sqrt{3}\,\sqrt{\sqrt{5}-2}$

Zweite Ableitung $f''(x) = \frac{10\,x\,(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$

Nullstellen der zweiten Ableitung und mögliche Wendestellen: $x_6 = -\sqrt{3},\ x_7 = \sqrt{3},\ x_8 = 0$

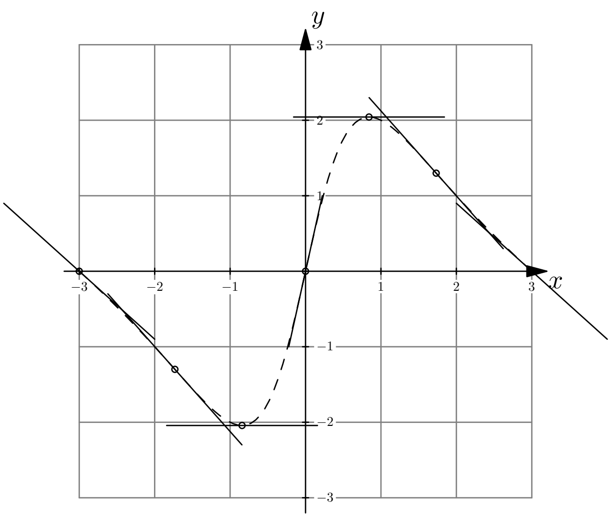
Interessante Stellen:

| $x$ | $-3$ | $-\sqrt{3}$ | $-\sqrt{3}\,\sqrt{\sqrt{5}-2}$ | $0$ | $\sqrt{3}\,\sqrt{\sqrt{5}-2}$ | $\sqrt{3}$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-3.0000$ | $-1.7320$ | $-.8415$ | $0.0000$ | $.8415$ | $1.7320$ | $3.0000$ |
| $f(x)$ | $0.0000$ | $-1.2990$ | $-2.0424$ | $0.0000$ | $2.0424$ | $1.2990$ | $0.0000$ |
| $f'(x)$ | $-.9000$ | $-1.1250$ | $-.0000$ | $4.5000$ | $-.0000$ | $-1.1250$ | $-.9000$ |
| $f''(x)$ | $-.1800$ | $0.0000$ | $3.8693$ | $0.0000$ | $-3.8693$ | $0.0000$ | $.1800$ |

Extrema:

$x_4 = -\sqrt{3}\,\sqrt{\sqrt{5}-2} \approx -.8415,\ f(x_4) = \frac{3^{\frac{3}{2}}\,(\sqrt{5}-5)\,\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2\,(3\,\sqrt{5}-5)} \approx -2.0424$: $f'' > 0$, Minimum

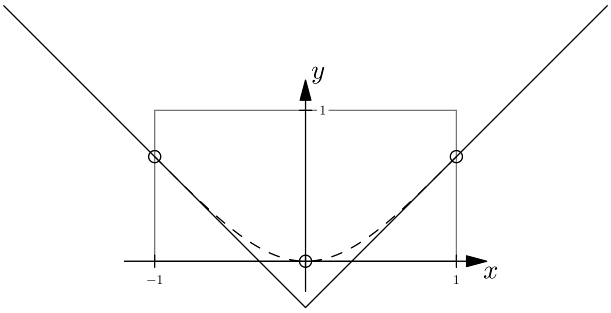
$x_5 = \sqrt{3}\,\sqrt{\sqrt{5}-2} \approx .8415,\ f(x_5) = -\frac{3^{\frac{3}{2}}\,(\sqrt{5}-5)\,\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2\,(3\,\sqrt{5}-5)} \approx 2.0424$: $f'' < 0$, Maximum



c) **Nullstellen**: $0 = f(x) = \log\left(x^2+1\right)$
$x_1 = 0$
**Ableitung** $f'(x) = \frac{2\,x}{x^2+1}$
**Nullstellen der Ableitung**: $x_2 = 0$
Zweite Ableitung $f''(x) = -\frac{2\,(x-1)\,(x+1)}{(x^2+1)^2}$
Nullstellen der zweiten Ableitung und mögliche Wendestellen: $x_3 = -1$, $x_4 = 1$
Interessante Stellen:

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $x$ | $-1.0000$ | $0.0000$ | $1.0000$ |
| $f(x)$ | $.6931$ | $0.0000$ | $.6931$ |
| $f'(x)$ | $-1.0000$ | $0.0000$ | $1.0000$ |
| $f''(x)$ | $0.0000$ | $2.0000$ | $0.0000$ |

Extrema:
$x_2 = 0 \approx 0.0000$, $f(x_2) = 0 \approx 0.0000$: $f'' > 0$, Minimum



d) **Nullstellen**: $0 = f(x) = -\frac{(x-4)\,(x-2)^2\,(x+2)}{20}$
$x_1 = -2,\ x_2 = 2,\ x_3 = 4$

**Ableitung** $f'(x) = -\frac{(x-4)\,(x-2)\,(x+2)}{10} - \frac{(x-2)^2\,(x+2)}{20} - \frac{(x-4)\,(x-2)^2}{20} = -\frac{(x-2)\,\left(2\,x^2-5\,x-6\right)}{10}$

**Nullstellen der Ableitung**: $x_4 = -\frac{\sqrt{73}-5}{4}$, $x_5 = \frac{\sqrt{73}+5}{4}$, $x_6 = 2$

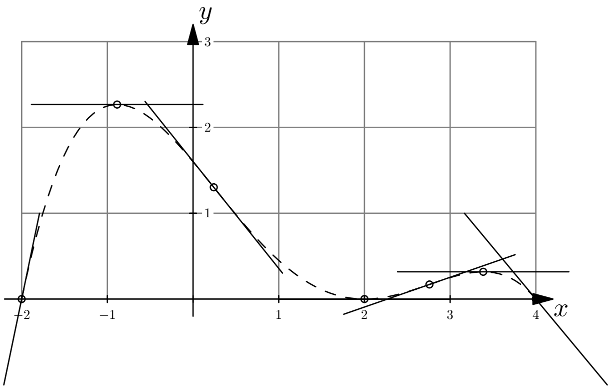
Zweite Ableitung $f''(x) = -\frac{3\,x^2-9\,x+2}{5}$

Nullstellen der zweiten Ableitung und mögliche Wendestellen: $x_7 = -\frac{\sqrt{57}-9}{6}$, $x_8 = \frac{\sqrt{57}+9}{6}$

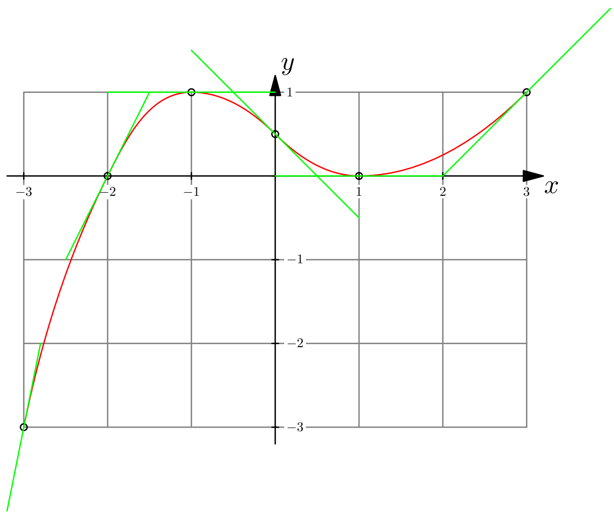
Interessante Stellen:

| $x$ | $-2$ | $-\frac{\sqrt{73}-5}{4}$ | $-\frac{\sqrt{57}-9}{6}$ | $2$ | $\frac{\sqrt{57}+9}{6}$ | $\frac{\sqrt{73}+5}{4}$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-2.0000$ | $-.8860$ | $.2416$ | $2.0000$ | $2.7583$ | $3.3860$ | $4.0000$ |
| $f(x)$ | $0.0000$ | $2.2667$ | $1.3023$ | $0.0000$ | $.1698$ | $.3176$ | $0.0000$ |
| $f'(x)$ | $4.8000$ | $-.0000$ | $-1.2469$ | $0.0000$ | $.3469$ | $.0000$ | $-1.2000$ |
| $f''(x)$ | $-6.4000$ | $-2.4658$ | $0.0000$ | $.8000$ | $.0000$ | $-1.1841$ | $-2.8000$ |

Extrema:
$x_4 = -\frac{\sqrt{73}-5}{4} \approx -.8860$, $f(x_4) = -\frac{\left(\sqrt{73}-13\right)\left(\sqrt{73}+3\right)^2\left(\sqrt{73}+11\right)}{5120} \approx 2.2667$: $f'' < 0$, Maximum
$x_5 = \frac{\sqrt{73}+5}{4} \approx 3.3860$, $f(x_5) = -\frac{\left(\sqrt{73}-11\right)\left(\sqrt{73}-3\right)^2\left(\sqrt{73}+13\right)}{5120} \approx .3176$: $f'' < 0$, Maximum
$x_6 = 2 \approx 2.0000$, $f(x_6) = 0 \approx 0.0000$: $f'' > 0$, Minimum

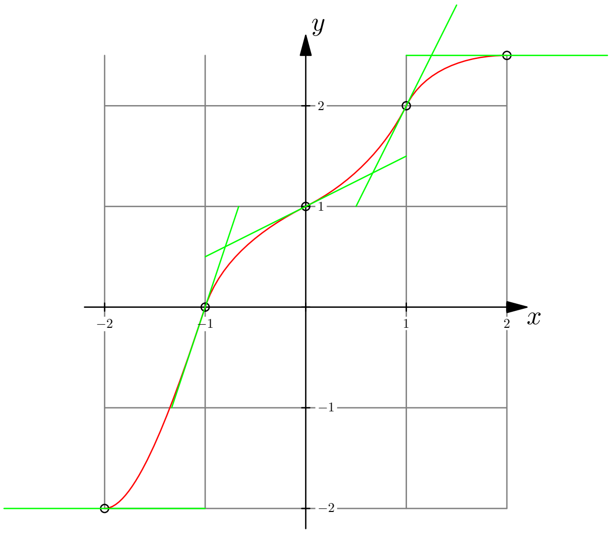



## Lösung zu Aufgabe 2.3 ex-kurvendiskussion-resultate-zeichnen




a)

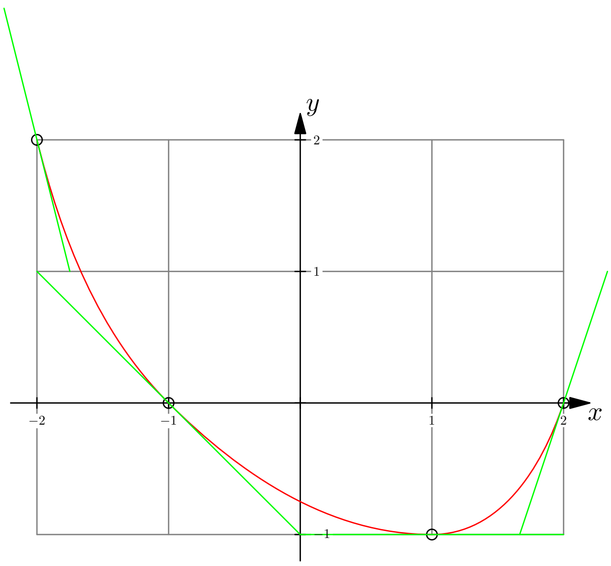
b)



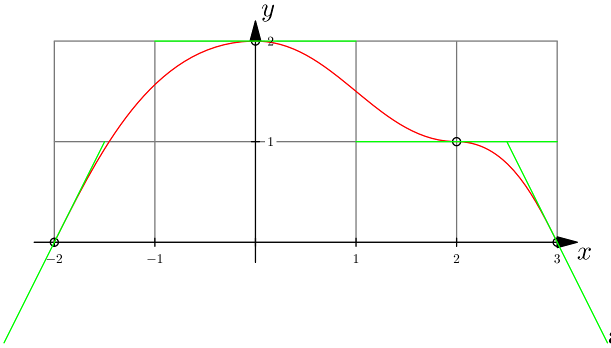

Links und rechts fehlt noch eine Nullstelle oder Wendestelle.

Z.B. bei $x = 2$ ist $f''(2) < 0$, es handelt sich also um ein Maximum. D.h. rechts davon ist $f'(x) < 0$ und die Funktion nimmt ab. Wird diese Abnahme nicht wieder kleiner, hat die Funktion noch eine fehlende Nullstelle. Hat die Funktion keine Nullstelle mehr, muss die Abnahme wieder kleiner werden, was eine Wendestelle bedeutet.

c)




d)




a

Bei ca. $x = 1$ fehlt eine Wendestelle.

**Lösung zu Aufgabe 2.5** ex-zylinder-minimale-oberflaeache-fuer-volumen

**Stellgrösse**: $r$ (Radius) in dm

**Zielgrösse**: $O = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$ in dm$^2$
**Nebenbedingung**: $V = 1$ dm$^2$ mit $V = h \cdot \pi r^2$.
Aus der Nebenbedingung erhalten wir $h = \frac{1}{\pi r^2}$.
**Zielfunktion**: $O(r) = 2\pi r \cdot \frac{1}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = 2\frac{1}{r} + 2\pi r^2$.
Ableitung: $O'(r) = -\frac{2}{r^2} + 4\pi r$.

$$\begin{aligned} 4\pi r &= \frac{2}{r^2} && \left| \cdot r^2 \cdot \frac{1}{4\pi} \text{ mit } r \neq 0 \right. \\ r^3 &= \frac{1}{2\pi} && \left| \sqrt[3]{\cdot} \right. \\ r &= \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \approx 0.542 \end{aligned}$$

Daraus folgt $h = 2r \approx 1.084$ und $O(r) \approx 5.536$.

### Lösung zu Aufgabe 2.6 ex-abstand-punkt-parabel

Sei $(x, f(x))$ ein Punkt auf der Kurve. Der Abstand vom Ursprung ist damit
$A(x) = \sqrt{x^2 + (f(x))^2}$
Von dieser Funktion suchen wir das Minimum. Wir können anstelle von $A(x)$ auch $B(x) = (A(x))^2$ betrachten.
Vorgehen: Extremalstellen bestimmen durch Lösen der Gleichung $B'(x) = 0$. Dann mit $B''(x)$ die Art der Extrema bestimmen und dann das absolute Minimum bestimmen.

a) $B(x) = x^2 + \left(\frac{1}{2}(x+2)^2 + 1\right)^2$
   $B'(x) = 0$ liefert $x \approx -1.1523$. Eingesetzt in $B''(x)$ ergibt sich ungefähr 6.156, wir haben also ein Minimum gefunden.
   Der effektive Abstand ist also $\sqrt{B(x)} \approx 1.782$.
b) $B'(x) = 0$ liefert $x \approx 0.356$, mit $B''(x) \approx 3.311$ und $A(x) \approx 1.160$.
c) $B'(x) = 0$ liefert für $x \approx \{-0.6730, 1.203, 2.470\}$ mit $B''(x) \approx \{23.59, -9.504, 15.92\}$. Wir haben also zwei lokale Minima. Wir werten also für den ersten und letzten Wert von $x$ die Funktion $A(x)$ aus und erhalten $A(x) \approx \{0.7024, 2.609\}$, wovon das Minimum 0.7024 die gesuchte Distanz ist.
d) $B'(x) = 0$ liefert $\{-0.8892, 0.6446, 1.745\}$ Die gesuchte Distanz ist $\approx 0.9451$.

### Lösung zu Aufgabe 2.7 ex-extremalaufgaben-repetitorium

a) $b$ : Breite des Quaders, $a$ : Länge, $c$ : Höhe (jeweils in cm). Volumen des Quaders $V = abc$ (in cm$^3$).
   Nebenbedingungen: $a = 4b$ und $4a + 4b + 4c = 180$ (in cm) $\Rightarrow c = 45–5b$
   Zielfunktion: $V(b) = 4b \cdot b \cdot (45–5b) = 180b^2–20b^3$ (in cm$^3$).
   Extremum: $V'(b) = 0 \Rightarrow b = 6$ (Kontrolle, ob Maximum durch $V'$)
   Die Kanten müssen $a = 24$ cm, $b = 6$ cm, $c = 15$ cm gewählt werden. Das maximale Volumen beträgt dann 2160 cm$^3$.
b) $x$ : Höhe des Parallelogramms, $r$ : Länge
   Fläche des Parallelogramms $A = x \cdot r$
   Nebenbedingung: ganzes Dreieck und Restdreieck über dem Parallelogramm sind ähnlich Es gilt daher: $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 7 - x}{r} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{7} \Rightarrow r = \frac{1}{3}\left(21 - 2\sqrt{3}x\right)$.
   Zielfunktion: $A(x) = \frac{1}{3}x\left(21 - 2\sqrt{3}x\right)$.
   Extremum: $A'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{7\sqrt{3}}{4}$ (Kontrolle, ob Maximum durch $A''$ )
   Das Parallelogramm hat die Länge $r = \frac{7}{2}$ cm, die Höhe $h = \frac{7\sqrt{3}}{4}$ cm und die maximale Fläche $A = \frac{49\sqrt{3}}{8}$ cm$^2$.

c) $r$ : Stelle in $[0, \pi]$, so dass der Punkt $(r, 0)$ die linke untere Ecke des Rechtecks ist.
Umfang des Rechtecks $U = 2a + 2b$
Nebenbedingungen: $a = (\pi - 2r$ und $b = 3\sin(r)$.
Zielfunktion: $U(r) = 2 \cdot 3\sin(r) + 2(\pi - 2r) = 6\sin(r) + 2\pi - 4r$.
Extremum: $U'(x) = 6\cos(r) - 4 = 0 \Rightarrow u \approx 0.841$ Das Rechteck hat die linke untere Ecke $\approx (0.841, 0)$ und den maximalen Umfang von $\approx 7.391$.

d) Gesuchter Punkt auf der Parabel: $Q(x, y)$.
Entfernung von $Q$ zu $P$: $d = \sqrt{(x-6)^2 + (y-0)^2}$.
Nebenbedingung: $y = \frac{1}{2}x^2$, weil $Q$ auf der Parabel liegt.
Zielfunktion: $d(x) = \sqrt{(x-6)^2 + \left(\frac{1}{2}x^2\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}x^4 + x^2 - 12x + 36}$.
Der Einfachheit halber bestimmen wir das Maximum der Funktion $e(x) = (d(x))^2$.
Extremum: $e'(x) = 0 \Rightarrow x^3 + 2x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$.
Der Punkt $Q(2, 2)$ hat von $P$ den kleinsten Abstand, und zwar $d = \sqrt{20}$.

### Lösung zu Aufgabe 2.8 ex-huellkurve-faden-bild

a)

b) $f_x(t) = -2 + 2t$, $f_y(t) = 1 - 2t$.

c) $g_x(t) = 2t$, $g_y(t) = -1 + 2t$.

d) $t = 0.125$, Funktionsgleichung $\ell(x) = -0.75 \cdot (x + 1.75) + 0.75$.

e) Funktionsgleichung einer Geraden durch zwei Punkte $P = (p_x, p_y)$ und $Q = (q_x, q_y)$:
Steigung $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{q_y - p_y}{q_x - p_x}$. Verschiebung der Ursprungsgeraden $y = m \cdot x$:

$$\ell(x) = m \cdot (x - p_x) + p_y = \frac{q_y - p_y}{q_x - p_x} \cdot (x - p_x) + p_y$$

f) $m = \frac{g_y(t) - f_y(t)}{g_x(t) - f_x(t)} = \frac{-2+4t}{2} = -1 + 2t$.

$$\begin{aligned} k_t(x) = (-1+2t) \cdot (x - (-2+2t)) + (1-2t) = \\ (-1+2t) \cdot x - (2 - 6t + 4t^2) + 1 - 2t = \\ (-1+2t) \cdot x - 4t^2 + 4t - 1 = \\ (-1+2t) \cdot x - (4t^2 - 4t + 1) = \\ (-1+2t) \cdot x - (-1+2t)^2 \end{aligned}$$

g) $y$-Wert: $y(t) = k_t(1) = (-1+2t) \cdot 1 - (-1+2t)^2 = -1 + 2t - 1 + 4t - 4t^2 = -2 + 6t - 4t^2$.
Wir suchen jenes $t$, für welches obiger Ausdruck möglichst gross wird. Dazu leiten wir nach $t$ ab: $y'(t) = 6 - 8t$. Bei der Extremalstelle ist $y'(t) = 0$, also $t = \frac{3}{4}$. Eingesetzt in $y(t) = k_t(1)$ erhält man
$-2 + 6 \cdot \frac{3}{4} - 4 \cdot \frac{9}{16} = \frac{-8+18-9}{4} = \frac{1}{4}$.
Somit liegt der Punkt $(1, 0.25)$ auf der Hüllkurve.

h) Wir wiederholen obige Schritte, jetzt aber für allgemeines $x_p$ anstatt für 1.

$y(t) = k_t(x_p) = (-1+2t) \cdot x_p - (-1+2t)^2$

Wir leiten wiederum nach $t$ ab, wobei hier $x_p$ nicht von $t$ abhängt und einfach eine Zahl ist.

$y'(t) = 2x_p - 2(-1+2t) \cdot 2.$

Null setzen: $y'(t) = 0 \Leftrightarrow x_p = -2+4t \Leftrightarrow t = \frac{x_p+2}{4}$

Den optimalen $t$-Wert einsetzen:

$$y(t) = y\left(\frac{x_p+2}{4}\right) =$$
$$\left(-1+2\cdot\frac{x_p+2}{4}\right)\cdot x_p - \left(-1+2\cdot\frac{x_p+2}{4}\right)^2 =$$
$$\left(-1+\frac{x_p+2}{2}\right)\cdot x_p - \left(-1+\frac{x_p+2}{2}\right)^2 =$$
$$\left(-1+\frac{x_p}{2}+1\right)\cdot x_p - \left(-1+\frac{x_p}{2}+1\right)^2 =$$
$$\frac{x_p^2}{2} - \left(\frac{x_p}{2}\right)^2 =$$
$$\frac{1}{4}x_p^2$$

Damit entspricht die Hüllkurve dem Funktionsgraphen von $h(x) = \frac{1}{4}x^2$, also einer Parabel.

i) Verlängert man die «Fadengeraden» durch weitere Punkte entsteht die ganze Parabel.

**Lösung zu Aufgabe 2.11** ex-extremalaufgaben-vom-buch

Die folgenden Lösungen sind Raubkopien aus dem Lösungsbuch. Wobei die Kopie ohne Gewaltanwendung gemacht wurde, was bei einem Raub dazugehört. Keine Sorge, auszugsweise für den Unterricht ist das ausdrücklich erlaubt. Was nicht erlaubt ist, ist das öffentliche zur Verfügung stellen…

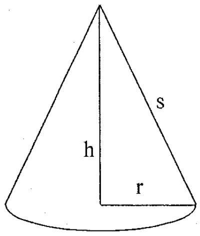
Mathematikaufgaben haben in vielen Fällen nicht die nötige Schöpfungshöhe, um geschützt zu sein. Was aber geschützt ist die Zusammenstellung und typographische Umsetzung.

22. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, $r^2 = s^2 - h^2$, $V(h) = \frac{1}{3}\pi(-h^3 + s^2 h)$

$V'(h) = -\pi h^2 + \frac{1}{3}\pi s^2 = 0 \Rightarrow h = \frac{s}{\sqrt{3}}$

a) $h \approx 23{,}09$ cm, $r \approx 32{,}66$ cm

b) $h = \frac{s}{\sqrt{3}}$, $r = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot s$

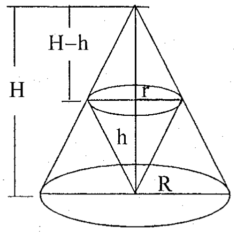



23. $V = \frac{\pi}{3} r^2 h$, $\frac{H-h}{H} = \frac{r}{R}$

$V(r) = \frac{\pi}{3}(-\frac{H}{R} r^3 + H r^2)$

$V'(r) = \frac{\pi}{3}(-\frac{3H}{R} r^2 + 2Hr) = 0$

$\Rightarrow \quad r = \frac{2}{3} R, \quad h = \frac{1}{3} H$

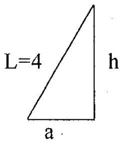


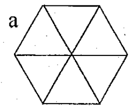

24. Grundfläche: Sechseck der Seitenlänge a

$G = 6 \cdot \frac{1}{2} a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$

$V = \frac{1}{3}(\frac{3}{2} a^2 \cdot \sqrt{3}) h$, $a^2 + h^2 = 16$

$V(h) = \frac{\sqrt{3}}{2}(-h^3 + 16h)$, $V'(h) = 0$: $h \approx 2{,}31$ m, $a \approx 3{,}27$ m



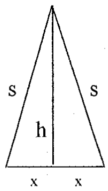

25. $d^2 = a^2 + y^2$, $a^2 = (x-3)^2$, $y = \frac{1}{4} x^2$

$d^2(x) = \frac{1}{16} x^4 + x^2 - 6x + 9$, $(d^2(x))' = \frac{1}{4} x^3 + 2x - 6 = 0$, $x = 2$ (Raten), $y = 1$

26. $d^2 = x^2 + y^2$, $x = 1000 - 5t$, $y = 700 - 10t$ (t Zeit in s), $d^2(t) = 125t^2 - 24000t + 1490000$
$t = 96$ s, $x = 520$, $y = -260$, $d_{min} \approx 581{,}38$ m

27. $A^2 = a^2 \cdot b^2$, $a^2 + b^2 = D^2$, $A^2(a) = -a^4 + D^2 a^2$, $(A^2(a))' = -4a^3 + 2D^2 a = 0$, $a = \frac{D}{\sqrt{2}}$, $b = \frac{D}{\sqrt{2}}$

28. $A = x \cdot h$, $A^2 = x^2 \cdot h^2$
$2x + 2s = U$, $x^2 + h^2 = s^2$
$A^2(x) = -Ux^3 + \frac{U^2}{4} x^2$
$x = \frac{U}{6}$, $s = \frac{U}{3}$ (gleichseitiges Dreieck)




29. $A = 0{,}5bh$, $A^2 = 0{,}25b^2h^2$
$\frac{b^2}{4} + h^2 = 900$, $A^2(h) = -h^4 + 900h^2$, $(A^2(h))' = -4h^3 + 1800h = 0$

$h = \sqrt{450} \approx 21{,}21$ cm, $b \approx 42{,}43$ cm
$\tan\alpha = \frac{b/2}{h} = 1 \Rightarrow \alpha = 45° \Rightarrow 2\alpha = 90°$

Die Bretter stehen senkrecht aufeinander.