Aufgabe 19.5 Leiten Sie $f(x) = x^n$ ab.

✎

Satz 1 Ableitung von Potenzfunktionen

Für beliebiges $p \in \mathbb{N}^+$ gilt: Die Ableitung von $f(x) = x^p$ ist $f'(x) = px^{p-1}$. In Kurzschreibweise:

$$(x^p)' = px^{p-1}$$

Der obige Satz gilt auch für negative ganzzahlige Exponenten und kann ähnlich wie oben bewiesen werden.
Der obige Satz gilt sogar für reelle Exponenten. Der Beweis dafür wird später mit Hilfe der Exponentialfunktion mit Basis e (= Eulersche Zahl), dem natürlichen Logarithmus und der Kettenregel geführt.

Aufgabe 19.6 Was ist die Ableitung einer konstanten Funktion, wie z.B. $f(x) = 1$?

✎

19.4 Ableitungen von Vielfachen und Summen

Die Definition mit dem Grenzwert des Differenzenquotienten ist oft nicht praktikabel. Im Folgenden werden Regeln für das Ableiten hergeleitet, mit denen schliesslich beliebige Funktionen (zusammengesetzt aus Standard-Funktionen mit bekannter Ableitung) «einfach» abgeleitet werden können.

19.4.1 Vielfaches einer Funktion

Aufgabe 19.7 Gegeben sei eine Funktion $f(x)$ und deren Ableitung $f'(x)$. Für eine beliebige reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ betrachte die Funktion $g(x) = a \cdot f(x)$. Beweisen Sie, dass $g'(x) = a \cdot f'(x)$. Der Beweis kann auf verschiedene Arten erfolgen. Einerseits algebraisch mit Hilfe des Differenzenquotienten, andererseits geometrisch.

✎

19.4.2 Summe zweier Funktionen

Aufgabe 19.8 Gegeben sind zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ und deren Ableitungen $f'(x)$ und $g'(x)$. Daraus wird eine neue Funktion $h(x) = f(x) + g(x)$ gebildet. Mit Hilfe des Differenzenquotienten kann man relativ einfach zeigen, dass $h'(x) = f'(x) + g'(x)$. Mehr Einsicht gewinnt man aber mit einem geometrischen Beweis.
Skizzieren Sie $h(x)$ und die Tangente an die Funktionen bei $x_0 = 2$. Zeichnen Sie Steigungsdreiecke mit gleichem Δx ein. Was ist die Steigung von h im Punkt $x_0 = 2$?