Definition 19.1 Eulersche Zahl e und $\exp(x)$

Die **Eulersche Zahl** e ist definiert als

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2.718281828459045.$$

Sie ist eine der wichtigsten mathematischen Konstanten.
Der *natürliche Logarithmus* ln ist der Logarithmus zur Basis e.
Man definiert die Funktion exp als:

$$\exp(x) := \mathrm{e}^x$$

Die Funktion $\exp(x) = \mathrm{e}^x$ wird oft auch einfach als *die Exponentialfunktion* bezeichnet.

Merke 19.4 Ableitung von $f(x) = \mathrm{e}^x = \exp(x)$

$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x \qquad (\exp(x))' = \exp(x)$$

Die Ableitung der Exponentialfunktion mit Basis e ist die Funktion selbst.

Diese Eigenschaft mag erst mal als Kuriosität erscheinen, ist aber fundamental wichtig.
Soll ein Vorgang beschrieben werden, dessen Änderungsrate proportional zu seiner Grösse ist (z.B. ist am Anfang einer Epidemie die Zunahme der Ansteckungen proportional zur Anzahl der Infizierten sein), kann man zeigen, dass nur Exponentialfunktionen diese Eigenschaft haben.

Merke 19.5

Alle Funktionen feiern eine Party. Da kommt der Ableitungsoperator und schreit: «Ich leite Euch alle ab!».
Alle Funktionen zittern vor Angst. Nur eine steht cool an der Bar und grinst: «Ich bin e^x!».

Aufgabe 19.10 Leiten Sie $f(x) = a^x$ ab, indem Sie die Funktion mit Basis e schreiben.

✎

Merke 19.6

Die Ableitung der Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ ist (für beliebiges $a > 0$)

$$f'(x) = (a^x)' = \ln(a)a^x.$$

Insbesondere gilt $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.