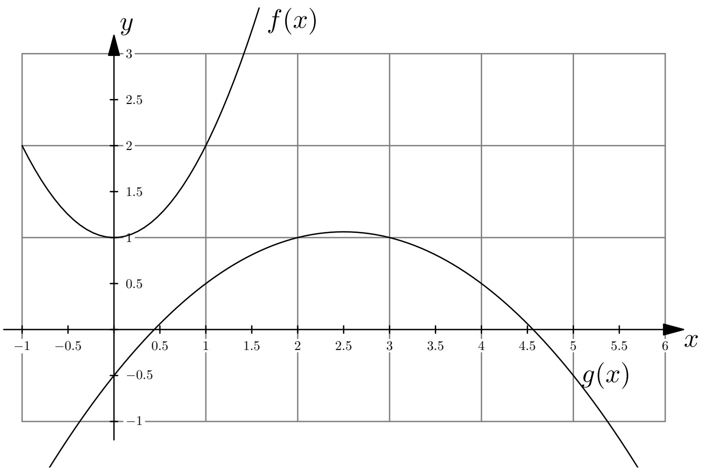
19.8 Kettenregel

Aufgabe 19.15 Gegeben sind zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$. Daraus wird eine neue Funktion $k(x) = f(g(x))$ gebildet.

a) Skizzieren Sie $k(x)$.

b) Skizzieren Sie die Tangente t_g im Punkt $x_0 = 3$ an g, die Tangente t_f im Punkt $g(x_0)$ an f und die Tangente t_k im Punkt x_0.

c) Was ist der Zusammenhang dieser drei Steigungen?
Oder salopp ausgedrückt: «Wie fest wackeln die Funktionswerte, wenn x_0 wackelt?».



✎

Aufgabe 19.16 Gegeben sind zwei Funktionen $f(x)$, $g(x)$ und deren Ableitungen. Daraus wird die Funktion $k(x) = f(g(x))$ definiert. Bestimmen Sie die Ableitung $k'(x)$. Schreiben Sie dazu f, g und k als lineare Approximationen.

Merke 19.11 Kettenregel

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \qquad \text{oder kurz} \qquad (f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$$

f wird **äussere Funktion**, g **innere Funktion** genannt.
Der Operator $\circ$ bedeutet die Verknüpfung von Funktionen und $f \circ g$ wird «f nach g» gelesen.

Aufgabe 19.17 Bestimmen Sie folgende Ableitungen. In einigen Fällen kann die Funktion nach Umformungen auch ohne Kettenregel abgeleitet werden.

a) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$
b) $f(x) = (\mathrm{e}^x)^2$
c) $f(x) = \ln\left(x^7\right)$
d) $f(x) = \ln(\mathrm{e}^x)$
e) $f(x) = g(h(k(x)))$
f) $f(x) = \mathrm{e}^{p\ln(x)}$
g) $f(x) = (\ln(x))^4$
h) $f(x) = \frac{1}{k(x)}$

Aufgabe 19.18 Mit Hilfe der Kettenregel kann nun die Formel zur Ableitung von Potenzfunktionen $f(x) = x^p$ für alle Exponenten $p \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ bewiesen werden. Vorgehen: Schreiben Sie $f(x)$ als Exponentialfunktion mit Basis e, wenden Sie ein Logarithmusgesetz an, leiten Sie ab und formen Sie wieder um.

✎

19.9 Produktregel

Als «letzte» Regel leiten wir die Produktregel her. Diese Herleitung ist technisch und gibt Einblick in einen in der Mathematik «geläufigen Trick», wo zu Termen Null addiert wird (oder mit Eins multipliziert wird).

Aufgabe 19.19 Gegeben sind zwei Funktionen f und g und deren Ableitungen. Zu bestimmen ist die Ableitung der Funktion $k(x) = f(x) \cdot g(x)$.