Lösung zu Aufgabe 19.16 ex-kettenregel-mit-linearer-approximation-herleiten

Es gilt $f(x_0+h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h$ und $g(x_0+h) \approx g(x_0) + g'(x_0)h$. Es gilt also:

$$k(x_0+h) = f(g(x_0+h)) \approx f\left(g(x_0) + \underbrace{h \cdot g'(x_0)}_{h_2}\right) \approx f(g(x_0)) + h_2 f'(g(x_0)) = f(g(x_0)) + h \cdot g'(x_0) f'(g(x_0))$$

Der erste Term ist $k(x_0)$, der zweite ist also $h \cdot k'(x_0)$. Wir schliessen daraus

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Intuitiv kann man die Sache wie folgt verstehen: Das Argument in f ändert sich nicht mit Änderungsrate 1 (wie wenn dort nur x stehen würde) sondern mit Änderungsrate $g'(x)$. Darum wird die Änderungsrate noch damit multipliziert. Man spricht von der inneren Ableitung.

Lösung zu Aufgabe 19.17 ex-kettenregel-anwenden

Die Hauptschwierigkeit besteht darin, die äussere und innere Funktion zu bestimmen. Wir schreiben $f(x) = g(h(x))$:

a) $g(x) = \mathrm{e}^x$ und $h(x) = x^2$. $g'(x) = \mathrm{e}^x$ und $h'(x) = 2x$. Und damit $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = \mathrm{e}^{x^2} \cdot 2x$.

b) $g(x) = x^2$, $h(x) = \mathrm{e}^x$, $g'(x) = 2x$, $h'(x) = \mathrm{e}^x$. Und damit $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = 2\mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^x = 2\mathrm{e}^{2x}$.

c) $g(x) = \ln(x)$, $h(x) = x^7$, $g'(x) = \frac{1}{x}$, $h'(x) = 7x^6$. Und damit $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = \frac{1}{x^7} \cdot 7x^6 = \frac{7}{x}$. Hätte man umgeformt als $f(x) = 7\ln(x)$ wäre die Sache etwas einfacher gewesen.

d) $g(x) = \ln(x)$, $h(x) = \mathrm{e}^x$, $g'(x) = \frac{1}{x}$, $h'(x) = \mathrm{e}^x$. Und damit $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^x} \cdot \mathrm{e}^x = 1$. Hätte man umgeformt als $f(x) = x$ wäre die Sache sofort klar.

e) $f'(x) = g'(h(k(x))) \cdot (h(k(x)))' = g'(h(k(x))) \cdot h'(k(x)) \cdot k'(x)$

f) $g(x) = \mathrm{e}^x$, $h(x) = p\ln(x)$, $g'(x) = \mathrm{e}^x$, $h'(x) = \frac{p}{x}$ und damit $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = \mathrm{e}^{p\ln(x)} \cdot \frac{p}{x}$.

g) $g(x) = x^4$, $h(x) = \ln(x)$, $g'(x) = 4x^3$, $h'(x) = \frac{1}{x}$ und damit $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = 4\left(\ln(x)\right)^3 \cdot \frac{1}{x}$

h) $f(x) = (k(x))^-1$. Äussere Funktion $g(x) = x^{-1}$, innere Funktion $h(x) = k(x)$, $g'(x) = -x^{-2}$, $h'(x) = k'(x)$ und damit $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = -(k(x))^{-2} \cdot k'(x) = -\frac{k'(x)}{(k(x))^2}$

Lösung zu Aufgabe 19.20 ex-produktregel-mit-linearer-approximation-herleiten

Es gilt $f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h$ und $g(x+h) \approx g(x) + g'(x)h$. Das Produkt ist

$$p(x+h) = f(x+h) \cdot g(x+h) \approx (f(x) + f'(x)h) \cdot (g(x) + g'(x)h) = f(x)g(x) + h(f(x)g'(x) + f'(x)g(x)) + h^2 f'(x)g'(x)$$

Der erste Teil ist $p(x)$, der zweite Teil ist eine lineare Approximation von p, also $p'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$. Der letzte Teil ist für sehr kleine h vernachlässigbar.

Lösung zu Aufgabe 19.21 ex-produktregel-anwenden

a) $f'(x) = \left(x^{42} \cdot \ln(x)\right)' = 42x^{41} \cdot \ln(x) + x^{42} \cdot \frac{1}{x} = x^{41} \cdot (1 + 42\ln(x))$

b) $f'(x) = \left(\sqrt{x} \cdot \mathrm{e}^x\right)' = \sqrt{x}\mathrm{e}^x + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \cdot \frac{2x+1}{2\sqrt{x}}$

c) $f'(x) = \left(2^x \cdot x^{-2}\right)' = \ln(2) \cdot 2^x \cdot x^{-2} + 2^x \cdot (-2) \cdot x^{-3}$

d) $f'(x) = \left(x^5 \cdot x^4\right)' = 5x^4 \cdot x^4 + x^5 \cdot 4x^3 = 9x^8$ Hier hätte man besser zuerst umgeformt.

Lösung zu Aufgabe 19.23 ex-quotientenregel-anwenden

a) $f'(x) = \left(\frac{\ln(x)}{x^3}\right)' = \frac{\frac{1}{x}x^3 - \ln(x) \cdot 3x^2}{(x^3)^2} = \frac{x^2 - 3x^2 \cdot \ln(x)}{x^6} = \frac{x^2(1 - 3\ln(x))}{x^6} = \frac{1 - 3\ln(x)}{x^4}$

b) $f'(x) = \left(\frac{x^5}{x^3}\right)' = \frac{5x^4 \cdot x^3 - x^5 \cdot 3x^2}{(x^3)^2} = \frac{2x^7}{x^6} = 2x$ Zuerst vereinfachen wäre einfacher gewesen!