Merke 18.1 Manipulation von Funktionsgraphen

Ersetzung	Effekt	Beispiel mit $f(x)=2^x$
$g(x)=f(x)+a$	Verschiebung um a in y-Richtung.	$g(x)=2^x-2$
$g(x)=a\cdot f(x)$	Streckung mit Faktor a in y-Richtung (d.h. auch Spiegelung an x wenn $a<0$).	$g(x)=-\frac{1}{3}2^x$
$g(x)=f(x+a)$	⚠Verschiebung um $-a$ in x-Richtung. ⚠	$g(x)=f(x-2)=2^{x-2}$
$g(x)=f(a\cdot x)$	⚠Streckung mit Faktor $\frac{1}{a}$ in x-Richtung ⚠ (d.h. auch Spiegelung und y wenn $a<0$).	$g(x)=f(-2\cdot x)=2^{-2x}$

Aufgabe 18.4 Ausgehend vom Graphen der Funktion $f(x)=2^x$, skizzieren Sie die Graphen von $a(x)=-\frac{1}{2}f(x)$, $b(x)=f\left(-\frac{1}{2}x\right)$, $c(x)=f(x)-4$, $d(x)=f(x-1)$, $e(x)=1-f(x-1)$.

Aufgabe 18.5 Sie legen heute auf der Bank 1 Rp. zu einem Zins von 3% an und lassen sich anschliessend einfrieren, um in 2000 Jahren wiederbelebt zu werden. Wie gross ist Ihr Kapital dann, wenn der Zinssatz gleich geblieben ist?

Vergleichen Sie den Betrag mit dem Schweizer Bruttoinlandsprodukt.

Bestimmen Sie die Exponentialfunktion $k(n)$, die das Kapital nach n Jahren beschreibt.

Aufgabe 18.6 Üblicherweise verzinst eine Bank angelegtes Kapital jährlich. Die Zins-Usanz – die Art und Weise wie verzinst wird – kennt aber verschiedene Spielweisen. Berechnen Sie den Wert eines Frankens nach einem Jahr, wenn

a) jährlich zu 5% verzinst wird.
b) monatlich zu $\frac{5\%}{12}$ verzinst wird.
c) wöchentlich zu $\frac{5\%}{52}$ verzinst wird.
d) täglich zu $\frac{5\%}{365}$ verzinst wird.
e) sekündlich zu $\frac{5\%}{\dots}$ verzinst wird.
f) über n Perioden zu $\frac{p}{n}$ verzinst wird.

Merke 18.2 Eulersche Zahl – Stetige Verzinsung

Die Eulersche Zahl e kann man definieren als «Limes»

$$\mathrm{e}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2.7182818284590 45\dots$$

Wenn man einen Franken mit einem Zinssatz von $1=100\%$ «unendlich oft»/«kontinuierlich»/«stetig» verzinst, so hat man nach einem Jahr $e=2.71\dots$ Franken.
Man kann zeigen: Bei kontinuierlicher Verzinsung mit Zinssatz p (etwa $p=0.05=5\cdot\frac{1}{100}=5\%$ wie in der obigen Aufgabe) wird aus einem Franken in einem Jahr der folgende Betrag in Franken:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{n}\right)^n=\mathrm{e}^p$$

Die Eulersche Zahl ist eine zentrale Grösse in der Mathematik und Naturwissenschaften.

Aufgabe 18.7 Die folgenden Prozesse können jeweils mit einer Exponentialfunktion der Form $f(x)=c\cdot a^x$ beschrieben werden. Bestimmen Sie jeweils diese Exponentialfunktion und beantworten Sie damit die Frage(n).

a) Hochgiftiges Plutonium 239 zerfällt radioaktiv. Während 2410 Jahren (Halbwertszeit) nimmt seine Masse um die Hälfte ab (es entstehen andere Elemente). Wie gross ist der Massenverlust pro Jahr?
b) Die Anzahl Bakterien in einer Nährlösung verdoppelt sich alle drei Stunden. Zu Beginn befinden sich 10'000 Bakterien in der Nährlösung. Wie viele Bakterien sind nach 1, 2, 5 und 24 Stunden in der Nährlösung?
c) Lässt man eine 90° C heisse Tasse Tee bei 0° C Lufttemperatur stehen, kühlt sich die Tasse pro 25 min um die Hälfte ab. Wie warm ist die Tasse nach 10 min? Wie warm ist die Tasse nach 2 h? Bestimmen Sie mit dem TR, wie lange es geht, bis der Tee 50° C warm ist.

Die Zahlen sind erfunden, die Tasse ist wohl eher gut isoliert.