Definition 18.2 Exponentielles Wachstum und Zerfall

Sei $B(t)$ eine Funktion, die den Bestand einer Substanz oder einer Tierart oder eines Geldbetrags usw. zum Zeitpunkt t angibt. Die Zeit t ist in einem beliebigen Zeitmass (Stunden, Sekunden, Jahre...) gemessen.

Falls sich der Bestand $B(t)$ pro Zeiteinheit um den Faktor q gleichmässig vermehrt bzw. verringert, so spricht man von **exponentiellem Wachstum** (für $q > 1$) bzw. **exponentiellem Zerfall** (für $0 < q < 1$).

Für den Bestand $B(t)$ zur Zeit t gilt dann die Formel

$$\boxed{B(t) = B_0 \cdot q^t\ ,}$$

wobei B_0 der Anfangsbestand zur Zeit 0 ist.
Hat man eine Zunahme (bzw. Abnahme) um den Faktor q während einer Zeitdauer Δt, so gilt die Formel:

$$\boxed{B(t) = B_0 \cdot q^{\frac{t}{\Delta t}}\ .}$$

Definition 18.3 Wachstumsfaktor

Für eine Wachstumsfunktion $B(t) = B_0 \cdot q^t$ und eine Zeitspanne Δt heisst

$$r = \frac{B(t + \Delta t)}{B(t)} = ✎$$

der zur Zeitspanne Δt gehörende **Wachstumsfaktor**.

Aufgabe 18.8 Zeigen Sie, dass der Wachstumsfaktor von Δt, aber nicht von t abhängt.

✎

Merke 18.3 Halbwertszeit und Verdoppelungszeit

Bei jedem Zerfallsprozess ist die **Halbwertszeit** die zum Wachstumsfaktor $\frac{1}{2}$ gehörende Zeitspanne.
Bei jedem Wachstumsprozess ist die **Verdopplungszeit** die zum Wachstumsfaktor 2 gehörende Zeitspanne.

Aufgabe 18.9 Nach 10 Tagen ist von einem radioaktiven Stoff noch 10% übrig. Wie gross ist die Halbwertszeit von diesem Stoff?
Sei $m(t)$ der Anteil (in $[0, 1]$) nach der Zeit t in Tagen.

$m(t) =$ ✎
Für die Halbwertszeit x gilt:

✎

Der TR liefert ✎

In der obigen Gleichung suchen wir einen Exponenten. Bis jetzt haben wir nur Gleichungen gelöst, wo die Unbekannte in der Basis steht, und haben dafür Wurzeln, bzw. rationale Exponenten verwendet.