

**Merke 18.9** Lösen von Exponential- und Logarithmusgleichungen

Logarithmiert man eine Exponentialgleichung (d.h. man nimmt den Logarithmus beider Seiten), kommen die Exponenten als Faktoren vor die Logarithmen.

Exponenziert man eine Logarithmusgleichung (d.h. man rechnet eine geeignete Basis hoch die beiden Seiten der Gleichung), fallen die Logarithmen weg. **Achtung:** Es muss eine Überprüfung der Lösungen erfolgen!

✳ **Aufgabe 18.30** Lösen Sie folgende Gleichungen. Geben Sie das Resultat sowohl exakt (mit Logarithmen oder Potenzen) wie auch auf 4 signifikante Stellen angenähert an.

a) $2^x = e^7$

b) $3^{x+3} = 2^{2x}$

c) $3^{x+2} \cdot 2^{x+3} = 4^{x+4}$

d) $(\sqrt{2^{x-1}})^{x+1} = \sqrt{3^x}$

e) $\log_2(x+4) = \log_2(2x+2)$

f) $\log_2(x+4) = \log_4(x+6)$

g) $\log_7(x-42) = \log_7(2x-23)$

h) $\log_3(x) + \log_4(x) = \log_5(x)$

i) $\log_3(-7x) = 2$

j) $\log_{2x-3}(27) = 3$

k) $\log_{7x^2-2x+2}(64) = 6$

18.7 Repetitionsaufgaben✳ **Aufgabe 18.31**

a) Für gewisse bildgebende Verfahren in der Medizin wird dem Patienten ein radioaktives Kontrastmittel verabreicht. Ein gängiges Isotop ist Fluor 18, das eine Halbwertszeit von knapp zwei Stunden hat. Die Vorbereitung des Isotops als Arznei dauert rund 50 Minuten.

(a) Wie viel von der ursprünglichen Masse des Fluor 18 ist nach der Vorbereitung noch vorhanden?

(b) Wann muss der Untersuch spätestens durchgeführt werden, wenn mindestens 60% des verabreichten Kontrastmittels noch vorhanden sein müssten?

b) Beim Beginn einer Epidemie kann die Anzahl Erkrankter mit einer Exponentialfunktion beschrieben werden. Vorgestern wurden 23 Erkrankte gezählt, heute 42.

1) Prognostizieren Sie damit die Anzahl Erkrankter in 2 Tagen und in einer Woche.

2) Berechnen Sie die Verdoppelungszeit. Lösen Sie die Gleichung von Hand und geben Sie ein exaktes Resultat nur mit natürlichen Zahlen und Logarithmen von natürlichen Zahlen an.

✳ **Aufgabe 18.32** Zeichnen Sie jeweils die Graphen der angegebenen Funktionen in ein Koordinatensystem (je Teilaufgabe ein Koordinatensystem). Beschreiben Sie jeweils auch, wie der Graph von $f(x)$ zu transformieren ist, um die Graphen der anderen Funktionen zu erhalten.

a) $f(x) = 2^x$, $g(x) = 2^{x-2}$, $h(x) = \log_2(x)$

b) $f(x) = 3^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $h(x) = -3^x + 2$

✳ **Aufgabe 18.33**

a) Beweisen Sie, dass $\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$ (für $b, x, y \in \mathbb{R}^+$, $b \neq 1$). Vorgehen: Schreiben Sie x und y als Potenz von b und setzen Sie ein.

b) Mit Basiswechsel und weiteren Logarithmusgesetzen zeigen Sie, dass $\log_{\frac{1}{b}}(x) = -\log_b(x)$.

c) Mit Basiswechsel und weiteren Logarithmusgesetzen zeigen Sie, dass $\log_{b^2}(x) = \frac{1}{2} \log_b(x)$.

d) * Sei g_n eine geometrische Reihe mit $q > 0$ und $g_1 > 0$. Zeigen Sie, dass $a_n = \log_2(g_n)$ eine arithmetische Reihe ist und bestimmen Sie die zugehörige Differenz d .