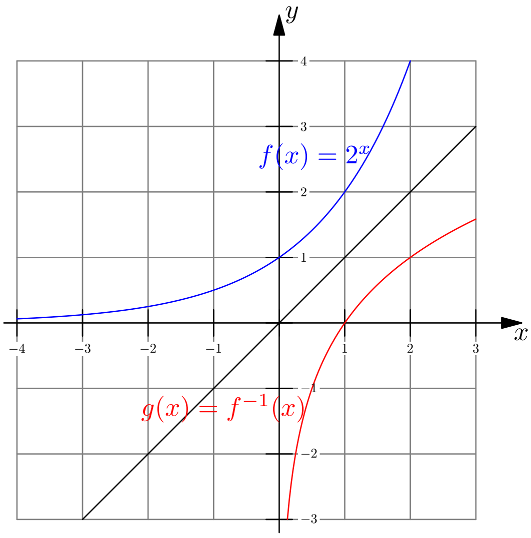
a) Es gilt $q^{28} = \frac{1}{2}$ und damit $q = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{28}} \approx 0.975549$. Geht man von einem Toleranzlevel L aus, startet man bei $B_0 = (100\% + 20\%) \cdot L = 1.2 \cdot L$.
Wir suchen also t so, dass $L = 1.2 \cdot L \cdot q^t$. Kürzt man L ergibt sich $1 = 1.2q^t \Leftrightarrow q^t = \frac{1}{1.2} = \frac{5}{6}$. Löst man diese Gleichung (TR) nach t auf, erhält man $t \approx 7.36496$ Jahre.

b) Es empfiehlt sich, bei beiden Getränken mit der gleichen Zeiteinheit zu rechnen.
   (a) Für Karamalz gilt offensichtlich, dass $3.1 = 5 \cdot q^{60} \Leftrightarrow q = \left(\frac{3.1}{5}\right)^{\frac{1}{60}} \approx 0.992064$ und damit $B(180) = 5 \cdot q^{180} \approx 1.19164$. Der Schaum steht also bei ca. 1.2 cm.
   (b) Für q_{Bier} gilt $q_{\text{Bier}} = \left(\frac{4.5}{5}\right)^{\frac{1}{14}} \approx 0.992502$. Es gilt $q_{\text{Bier}} \approx 0.992502 > 0.992064 = q_{\text{Karamalz}}$ und damit zerfällt der Schaum von Karamalz schneller.
   (c) Das ist eine «Fangfrage». Die prozentuale Änderung in einer Minute beträgt zum Zeitpunkt t: $\frac{B(t+60)}{B(t)} - 1 = \frac{B_0 \cdot q^{t+60}}{B_0 \cdot q^t} - 1 = \frac{B_0 \cdot q^t q^{60}}{B_0 \cdot q^t} - 1 = q^{60} - 1$. Das heisst, die prozentuale Abnahme ist konstant und unabhängig von der Zeit. Dies gilt für *alle* exponentiellen Wachstums- und Zerfallsprozesse.

Lösung zu Aufgabe 18.11 ex-2hoch-umkehren

Vorgehen: Um z.B. $g(2)$ einzuzeichnen, muss folgende Frage beantwortet werden: «Für welchen x-Wert ist $f(x) = 2$?» Die Antwort ($x = 1$) kann auf dem Graphen von $f(x)$ abgelesen werden (wo ist der y-Wert gleich 2?). Konkret heisst das, wenn (a, b) ein Punkt auf $f(x)$ ist (d.h. $f(a) = b$), dann ist (b, a) ein Punkt $g(x)$.

Somit erhält man den Graphen von $g(x)$, wenn man den Graphen von $f(x)$ an der 45° Winkelhalbierenden spiegelt.



Lösung zu Aufgabe 18.13 ex-spezielle-logarithmen-von-hand

a) $\lg(10'000) = 4$ b) $\lg(0.1) = -1$ c) $\lg\left(10^{23}\right) = 23$ d) $\lg(0.0001) = -4$

e) $\text{lb}(1024) = 10$ f) $\text{lb}(0.125) = -3$ g) $\ln(1) = 0$ h) $\ln\left(\mathrm{e}^{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}$

Lösung zu Aufgabe 18.14 ex-einfache-exponentialgleichungen

a) $8^x = 16 \iff x = \log_8(16) = \frac{4}{3}$ (man könnte die Gleichung so umformen, dass auf beiden Seiten die Basis 2 steht: $2^{3x} = 2^4$).

b) $2^x = 7 \iff x = \log_2(7) \approx 2.807$

c) $10^x = \frac{1}{2} \iff x = \lg\left(\frac{1}{2}\right) \approx -0.3010$

d) $a^x = 7 \iff x = \log_a(7)$ e) $2^x = b \iff x = \log_2(b)$ f) $z^x = y \iff x = \log_z(y)$

Lösung zu Aufgabe 18.16 ex-logarithmen-von-hand