Lösung zu Aufgabe 18.33 ex-repe-logarithmusgesetze

a) Siehe Theorie.

b) Man wendet die Basiswechselformel an: $\log_{\frac{1}{b}}(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b\left(\frac{1}{b}\right)} = \frac{\log_b(x)}{-1} = -\log_b(x)$, was zu beweisen war.

c) Man wendet die Basiswechselformel an: $\log_{b^2}(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(b^2)} = \frac{\log_b(x)}{2} = \frac{1}{2}\log_b(x)$

d) Es gilt $g_n = g_1 \cdot q^{n-1}$ und damit $a_n = \log_2(g_n) = \log_2\left(g_1 \cdot q^{n-1}\right) = \log_2(g_1) + (n-1) \cdot \log_2(q)$, was der Form einer arithmetischen Reihe mit erstem Glied $a_1 = \log_2(g_1)$ und Differenz $d = \log_2(q)$ entspricht.

Lösung zu Aufgabe 18.34 ex-repe-logarithmen-von-hand

Hinweis: Die Aufgaben b) und c) können noch einfacher mit den Logarithmengesetzen berechnet werden, z.B. mit Basiswechsel zur Basis 2 bzw. 3.

a) $\log_7\left(\frac{1}{49}\right) = -2$

b) $\log_{16}(8) = \log_{16}\left(2^3\right) = \log_{16}\left(\left(16^{\frac{1}{4}}\right)^3\right) = \log_{16}\left(16^{\frac{3}{4}}\right) = \frac{3}{4}$

Oder $\log_{16}(8) = \frac{\log_2(8)}{\log_2(16)} = \frac{3}{4}$.

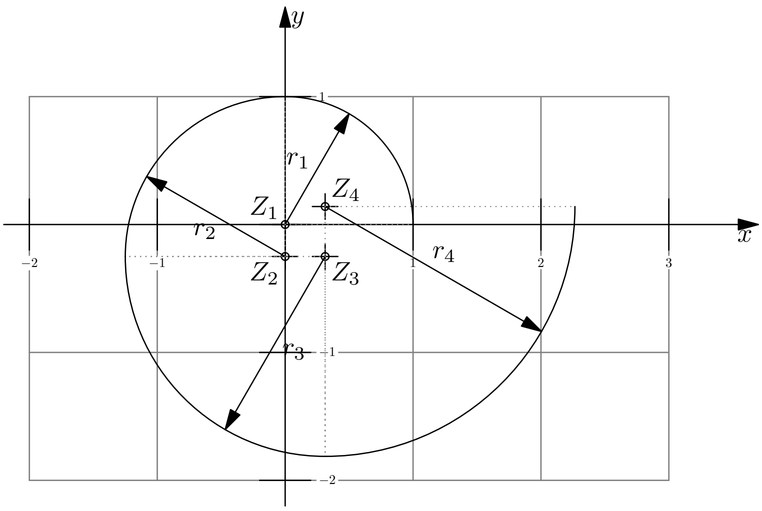
c) $\log_{27}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\right) = \log_{27}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3^2}}\right) = \log_{27}\left(\frac{1}{3^{\frac{2}{3}}}\right) = \log_{27}\left(3^{-\frac{2}{3}}\right) = \log_{27}\left(\left(27^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{2}{3}}\right) = \log_{27}\left(27^{-\frac{2}{9}}\right) = -\frac{2}{9}$

d) $5^{\log_5(10)} = 10$

e) $125^{\log_5(4)} = \left(5^3\right)^{\log_5(4)} = 5^{3\cdot\log_5(4)} = \left(5^{\log_5(4)}\right)^3 = 4^3 = 64$

f) $5^{\log_{125}(8)} = \left(125^{\frac{1}{3}}\right)^{\log_{125}(8)} = 125^{\frac{1}{3}\cdot\log_{125}(8)} = \left(125^{\log_{125}(8)}\right)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$

Lösung zu Aufgabe 18.35 ex-repe-geometrische-reihe

a) 

b) Die Radien bilden eine geometrische Folge mit erstem Element $r_1 = 1$ und Quotient $q = \frac{5}{4}$. Die Folge der Bogenlängen $b_n = \frac{1}{4} \cdot 2\pi r_n = \frac{1}{2}\pi r_n$ ist ebenfalls geometrisch mit $q = \frac{5}{4}$. Die Länge der Spirale ist also

$$s_{20} = \sum_{i=1}^{20} b_i = b_1 \cdot \frac{q^{20}-1}{q-1} = \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{\left(\frac{5}{4}\right)^{20}-1}{\frac{1}{4}} = 2\pi \cdot \left(\left(\frac{5}{4}\right)^{20} - 1\right) \approx 538.7$$