Lösung zu Aufgabe 17.2 ex-expl-impl-rek

a) $(a_n) = 8, 7, 6, 5, 4, 3, \dots$ und $(a_n) = \begin{cases} a_0 = 8 \\ a_n = a_{n-1} - 1 \quad \text{für alle } n \geq 1. \end{cases}$ Die Folge ist arithmetisch.

b) $a_n = 3 \cdot 2^n$ und $(a_n) = \begin{cases} a_0 = 3 \\ a_n = a_{n-1} \cdot 2 \quad \text{für alle } n \geq 1. \end{cases}$ Die Folge ist geometrisch.

c) $(a_n) = 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots$ und $a_n = n^2$. Diese Folge ist weder arithmetisch noch geometrisch. (Man nennt eine solche Folge «arithmetisch 2. Ordnung», weil die Differenzenfolge (= Folge der Differenzen) eine arithmetische Folge ist).

d) $(a_n) = 16, 8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \dots$ und $(a_n) = \begin{cases} a_0 = 16 \\ a_n = a_n \cdot \frac{1}{2} \quad \text{für alle } n \geq 1. \end{cases}$ Die Folge ist geometrisch.

e) $a_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ und z.B. $(a_n) = \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2^n} \quad \text{für alle } n \geq 1. \end{cases}$. Die Folge ist weder arithmetisch noch geometrisch. Sie ist die Folge der Teilsummen einer geometrischen Folge.

f) $(a_n) = 100, 102, 104.04, 106.1208, \dots$ und $a_n = 100 \cdot (1.02)^n$. Die Folge ist geometrisch.

Lösung zu Aufgabe 17.3 ex-param-arithmetisch

Generell gilt $a_n = a_0 + nd$.

Setzt man die gegebenen Grössen ein, ergibt sich ein Gleichunggsystem für a_0 und d.

a) $d = a_3 - a_2 = 2$, $a_0 = a_2 - 2d = 1$.

b) $3d = a_8 - a_5 = 15$, also $d = 5$. Dann ist $a_0 = a_5 - 5d = -8$.

c) $d = \dfrac{a_{12} - a_8}{4}$ und $a_0 = a_8 - 8d = a_8 - 2(a_{12} - a_8)$.

d) $d = \dfrac{a_m - a_n}{m - n}$ und $a_0 = a_n - nd = a_n - n\dfrac{a_m - a_n}{m - n}$

e) $a_0 + 15d + a_0 + 20d = 300$, also $20 + 35d = 300$, also $35d = 280$, also $d = \dfrac{280}{35}$.

f) $\begin{cases} (a_0 + 2d)(a_0 + 3d) &= 24 \\ a_0 + 4d &= 13 \end{cases}$

Die Lösungen dieses Gleichungssystem sind $a_0 = -7$ und $d = 5$ oder $a_0 = -45$ und $d = \dfrac{29}{2}$.

g) $\begin{cases} (a_0 + 2d) &= 4(a_0 + 6d) \\ (a_0 + 2d) + (a_0 + 3d) &= 10 \end{cases}$

Lösung: $a_0 = \dfrac{220}{29}$, $d = -\dfrac{30}{29}$

h) Es gilt $a_n = a_0 + n \cdot d$. Für n wird nun a_3 eingesetzt, und dieses dann auch mit a_0 und d ausgedrückt:
$\begin{cases} a_0 + a_3 \cdot d = a_0 + (a_0 + 3d) \cdot d &= 58 \\ a_0 + a_0 \cdot d &= 10 \end{cases}$
Zieht man die zweite Gleichung von der ersten ab, erhält man $3d^2 = 48$, was $d = \pm 4$ ergibt. Also sind die Lösungen $a_0 = 2$ und $d = 4$ und $a_0 = -\dfrac{10}{3}$ und $d = -4$. Die zweite Lösung ist streng genommen keine Lösung, weil $a_3 = -\dfrac{10}{3} + 3 \cdot (-4) = -\dfrac{46}{3}$ gilt und dann die Gleichung $a_{a_3} = 58$ in der Aufgabenstellung zu $a_{-\frac{46}{3}}$ wird, was keine sinnvolle Bedingung ist, denn eine Folgeglied mit dem Index $-\dfrac{46}{3}$ existiert nicht. Verallgemeinert man die Folge aber auf die rellen Zahlen (erlaubt also reelle Zahlen als Indizes), so erhält man ganz einfach eine lineare Funktion und auch die zweite Lösung ist sinnvoll.

Für das effiziente Lösen mit dem Taschenrechner wird zuerst die Funktion a wie folgt definiert:

$$a_0 + nd \to a(n)$$