Untersuchen Sie die Werte mit «menu 5 1»
Passen Sie die Anzahl Glieder mit «menu 3 7 1 ↑» an und bestätigen Sie mit «enter».

Aufgabe 17.24 Die Fibonacci-Folge (f_n) ist wie folgt definiert:

$$(f_n) = \begin{cases} f_0 & = 0 \\ f_1 & = 1 \\ f_n & = f_{n-1} + f_{n-2} \end{cases}$$

a) Schreiben Sie die ersten 10 Glieder der Folge auf.

b) Wir sagen, dass eine Folge (g_n) die Fibonacci-Eigenschaft hat, wenn $g_n = g_{n-1} + g_{n-2}$ für alle $n \geq 2$ gilt.
Bestimmen Sie alle geometrischen Folgen (g_n) mit $g_0 = 1$, die die «Fibonacci-Eigenschaft» haben.
Hinweis: Es gibt zwei solche Folgen; die eine hat einen positiven Wachstumsfaktor $\varphi > 0$, die andere hat einen negativen Wachstumsfaktor $\psi < 0$.

c) Zeigen Sie: Wenn eine Folge (a_n) die Fibonacci-Eigenschaft hat, dann hat auch die durch $b_n = \lambda a_n$ definierte Folge (b_n) die Fibonacci-Eigenschaft, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ eine bliebige relle Zahl ist.

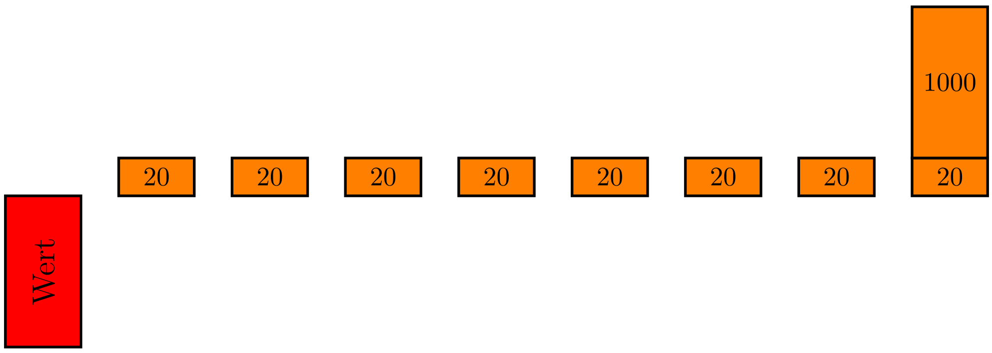
d) Zeigen Sie: Wenn zwei Folgen (a_n) und (b_n) die Fibbonaci-Eigenschaft haben, dann hat auch die durch $c_n = a_n + b_n$ definiert Folge (c_n) die Fibonacci-Eigenschaft.

e) Seien (g_n) und (h_n) die beiden geometrischen Folgen aus Aufgabe b). Diese sollen nun so multipliziert und dann addiert werden, dass die Fibonacci-Folge herauskommt.
Bestimmen Sie also zwei Konstanten x und y so, dass $f_n = x \cdot g_n + y \cdot h_n$ für $n = 0$ und $n = 1$ gilt.

Aufgabe 17.25

«Bonds» oder auf Deutsch «Obligationen» sind sogenannt festverzinsliche Wertanleihen. Unternehmen und Staaten nehmen Geld auf, indem sie Bonds herausgeben. Bondhändler – oder auch sogenannte fixed-income trader – sind häufig Topverdiener bei Banken: Sie kaufen und verkaufen die Bonds von Staaten und Unternehmen.

Das Prinzip eines Bonds ist sehr einfach: Wir illustrieren das anhand einer Verschuldung von Fr. 1000 mit einem jährlichen Coupon von Fr. 20 und einer Laufzeit von 8 Jahren. Der Coupon ist Schuldzins: Jedes Jahr wird der Coupon fällig und am Schluss der Laufzeit noch der Nennwert von Fr. 1000. Die Zahlungsströme eines achtjährigen Bonds sehen also wie folgt aus:



Der Preis oder Wert eines Bonds ist nun der Wert aller dieser zukünftigen Zahlungsströme. Zu diesem Zweck brauchen wir den sogenannten *Zeitwert* des Geldes. Wenn Fr. 100 heute verfügbar sind und aktuell Zinsen von beispielsweise 3% vorherrschen, dann haben wir ein Jahr später: Fr. $100 \cdot (1 + 0.03) =$ Fr. 103, genau gleich – ohne Währungseinheit – gilt nach zwei Jahren $100 \cdot (1+0.03)^2 \approx 106.09$, nach 3 Jahren $100 \cdot (1+0.03)^3 \approx 109.27$ und damit nach n Jahren $100 \cdot (1 + 0.03)^n$.

Man kann nun die gleiche Frage in umgekehrter zeitlicher Richtung stellen: Wie viel Geld x brauche ich heute, um in einem Jahr Fr. 100 zu haben? In zwei Jahren Fr. 100? In n Jahren Fr. 100. Es muss also gelten $x \cdot (1+0.03) = 100$ für ein Jahr, also $x = \dfrac{100}{1+0.03} \approx 97.09$. Das heisst, heute Fr. 97.09 sind gleich viel Wert wie Fr. 100 in einem Jahr. Für zwei Jahre ist $x \cdot (1 + 0.03)^2 = 100$ also $x = \dfrac{100}{(1+0.03)^2} \approx 94.26$ und allgemein nach n Jahren gilt, dass $x = \dfrac{100}{(1+0.03)^n}$ ist.