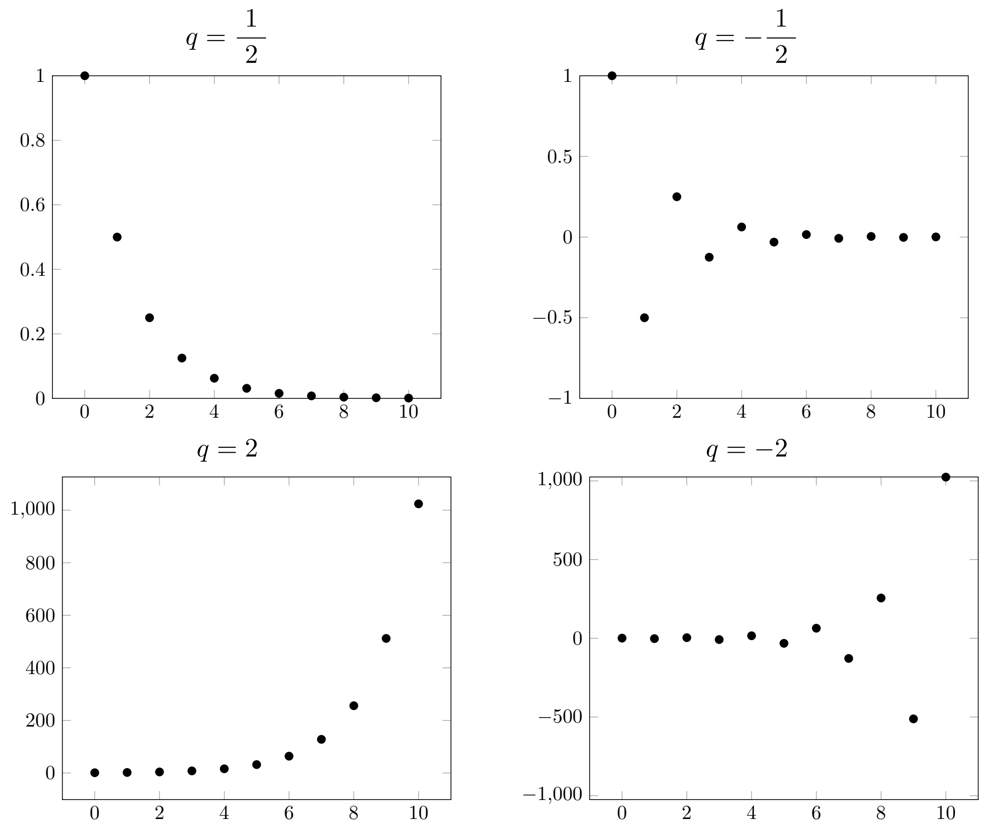
(a) 

(b) Für $|q| < 1$ spricht man von «gedämpften» Verhalten, für $|q| > 1$ von «explodierendem» Verhalten. Ebenso wird für $q < 0$ das Verhalten «alternierend» und für $q > 0$ «mononton» genannt. Die beiden linken Graphen sind monoton, die beiden rechten alternierend. Die beiden oberen Graphen sind gedämpft und die beiden unteren sind explosiv.

(c) Guthaben auf einem Sparkonto bei der Bank: Konstantes prozentuales Wachstum (Zinssatz $p > 0$, Wachstumsfaktor $q = 1 + p$) ist ein Beispiel von monotonem und explodierendem Verhalten.

Lösung zu Aufgabe 17.8 ex-folgen-verknuepfen-allgemein

Die Folgen sind explizit durch $a_n = a_0 + nd$ und $b_n = b_0 + ne$ gegeben.

a) $c_n = a_n + b_n = a_0 + nd + b_0 + ne = (a_0 + b_0) + n(d + e)$. Damit ist (c_n) arithmetisch mit Startwert $a_0 + b_0$ und Differenz $d + e$.

b) $f_n = n \cdot a_n = n \cdot (a_0 + n \cdot d) = n \cdot a_0 + n^2 \cdot d$.
Wenn f_n arithmetisch ist, müssen insbesondere der Schritt von f_0 zu f_1 und der Schritt von f_1 zu f_2 gleich gross sein, in Formeln
$$f_1 - f_0 = f_2 - f_1$$
Wegen $f_0 = 0$ und $f_1 = a_0 + d$ und $f_2 = 2a_0 + 4d$ muss also
$$f_1 - f_0 = a_0 + d \overset{!}{=} f_2 - f_1 = a_0 + 3d$$
gelten d. h. $a_0 + d = a_0 + 3d$, also $d = 0$. (In diesem Fall ist f_n die «Nullfolge» (= alle Folgeglieder sind Null). Die Nullfolge ist offensichtlich arithmetisch.)
Alternative Begründungen:
Saloppe Begründung: Im Allgemeinen ist (f_n) wegen des quadratischen Terms n^2 nicht arithmetisch. (Wird n um 1 erhöht, wächst die Folge nicht konstant, sondern umso mehr, je grösser n ist).
Damit die Folge arithmetisch ist, darf kein n^2 mehr vorkommen, d.h. es muss $d = 0$ gelten. Das ist der Fall, wenn die Folge (a_n) die konstante Folge $a_0, a_0, a_0, \ldots$ ist (d.h. alle Folgeglieder sind gleich).
Genaue Begründung: Genau dann ist (a_n) arithmetisch, wenn $f_{n+1} - f_n = (n+1) \cdot a_0 + (n+1)^2 \cdot d - (n \cdot a_0 + n^2 \cdot d) = a_0 + 2nd + d$ konstant, d.h. unabhängig von n sein. Dies ist genau dann der Fall, wenn $d = 0$ gilt.

c) $e_n = 2^{a_n} = 2^{a_0 + nd} = 2^{a_0} \cdot 2^{nd} = 2^{a_0} \cdot \left(2^d\right)^n$. Damit ist (e_n) geometrisch mit Startwert $e_0 = 2^{a_0}$ und Quotient $q = 2^d$.