Lösung zu Aufgabe 17.12 ex-summenformel-arithmetisch

a) Zu bestimmen ist $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 1000$. Der Trick besteht darin, diese Summe «umgedreht» darunterzuschreiben und aufzusummieren:

	$S =$	1	$+2$	$+3$	$+\cdots$	$+998$	$+999$	$+1000$
	$S =$	1000	$+999$	$+998$	$+\cdots$	$+3$	$+2$	$+1$
aufsummiert	$2S =$	1001	$+1001$	$+1001$	$+\cdots$	$+1001$	$+1001$	$+1001$

Da rechts 1000 Mal der Summand 1001 steht, gilt $2S = 1000 \cdot 1001$ und Division durch 2 liefert

$$S = \frac{1000 \cdot 1001}{2} = 500 \cdot 1001 = 500'500 \qquad \text{bzw. mit dem Summenzeichen} \qquad \sum_{i=1}^{1000} i = 500'500$$

b) Wenn man analog wie oben vorgeht, muss man an einer Stelle aufpassen: Zwischen 100 und 200 gibt es 101 ganze Zahlen!
Man erhält so $2S = 101 \cdot (100 + 200) = 101 \cdot 300$ und damit

$$S = \sum_{i=100}^{200} i = \frac{101 \cdot (100 + 200)}{2} = 101 \cdot 150 = 15'000 + 150 = 15'150$$

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

d) $\displaystyle\sum_{i=n}^{m} i = \frac{(m-n+1) \cdot (m+n)}{2}$ (die Anzahl der Summanden ist $(m-n+1)$).
Wer mag, kann auch die vorige Teilaufgabe verwenden:

$$\sum_{i=n}^{m} i = \sum_{i=1}^{m} i - \sum_{i=1}^{n} i = \frac{m \cdot (m+1)}{2} - \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{m \cdot (m+1) - n \cdot (n+1)}{2} = \frac{m^2 + m - n^2 - n}{2}$$
$$= \frac{m^2 - n^2 + m - n}{2} = \frac{((m-n)+1) \cdot (m+n)}{2}$$

e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{102} 2i = \frac{102 \cdot (2 + 204)}{2} = 10'506$ oder $\displaystyle\sum_{i=1}^{102} 2i = 2 \cdot \sum_{i=1}^{102} i = 2 \cdot \frac{102 \cdot 103}{2} = 102 \cdot 103 = 10'506$

f) $\displaystyle\sum_{i=50}^{151} (2i+1) = \frac{102 \cdot (101 + 303)}{2} = 20'604$ oder mit Hilfe von (d)

$$\sum_{i=50}^{151} (2i+1) = 2 \cdot \sum_{i=50}^{151} i + \sum_{i=50}^{151} 1 = 2 \cdot \frac{(101+1) \cdot 201}{2} + 102 = 102 \cdot 201 + 102 = 20'604$$

g) $\displaystyle\sum_{i=0}^{10} (a_0 + i \cdot d) = \frac{11 \cdot (a_0 + (a_0 + 10d))}{2} = \frac{11 \cdot (2a_0 + 10d)}{2} = 11 \cdot (a_0 + 5d)$

h) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} (a_0 + i \cdot d) = \frac{(n+1) \cdot (a_0 + (a_0 + nd))}{2} = (n+1) \cdot \frac{(a_0 + a_n)}{2}$ oder

$$\sum_{i=0}^{n} (a_0 + i \cdot d) = \sum_{i=0}^{n} a_0 + \sum_{i=0}^{n} i \cdot d = \sum_{i=0}^{n} a_0 + d \cdot \sum_{i=0}^{n} i = (n+1) \cdot a_0 + d \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$