- $s_n = g_0 \cdot \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} = 500 \cdot \dfrac{1-0.2^6}{1-0.2} = \dfrac{15624}{25} = 624.96$

Lösung zu Aufgabe 17.21 ex-reihen-geometrische-figur

(a) Bei einer Seitenlänge s kann man die Fläche ist die Fläche eines Dreiecks gegeben als $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} s \cdot \frac{1}{2} s = \frac{1}{8} s^2$. Das einbeschriebene Quadrat hat die Seitenlänge $\tilde{s} = \sqrt{\frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2}s^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} s$. Setzen wir nun $\tilde{s}$ in die Formel für die Fläche eines Dreiecks erhalten wir $\frac{1}{8}\tilde{s}^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{8}s^2$. Das darauffolgende Dreieck ist also genau halb so gross wie das aktuelle Dreieck. Wir haben also eine geometrische Reihe mit $g_0 = \frac{1}{8} \cdot 8^2$ und $q = \frac{1}{2}$ Setzen wir dies in die Summenformel ein, erhalten wir: $\sum_{i=0}^{8} g_i = g_0 \cdot \frac{1-q^9}{1-q} = 8 \cdot \frac{1-\frac{1}{512}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{511}{32} \approx 15.97$.

(b) Mit der gleichen Überlegung wie bei a) kommt man zur Formel

$$\sum_{i=0}^{\infty} g_i = g_0 \cdot \frac{1}{1-q} = 8 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = 16$$

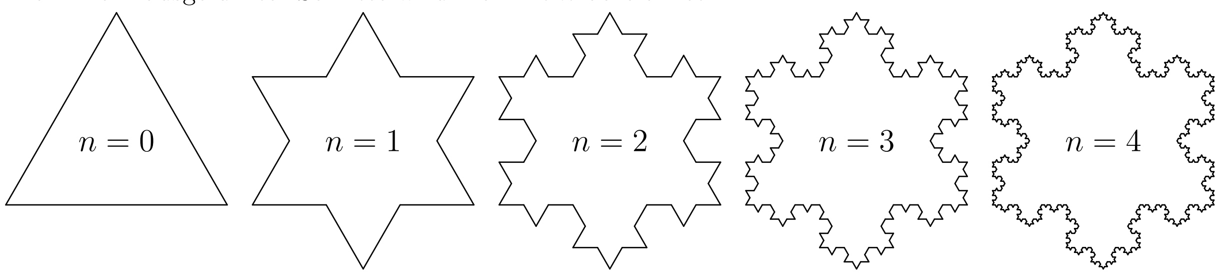
Die Figur hat also eine Fläche von $16\,\text{cm}^2$
Dies ist auch anschaulich klar: Die rote «Spiral-Figur» und die drei gleich grossen, an den anderen Ecken des Quadrats startenden «Spiral-Figuren» füllen das gesamte Quadrat. Deswegen hat die rote Spiral-Figur ein Viertel der Fläche des Quadrats, also $\frac{6}{4}4 = 16$ Quadratzentimeter.

(c) Der Streckfaktor von einem Dreieck auf das nächstkleinere Dreieck beträgt $q = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Ab dem zweiten Dreieck trägt jedes Dreieck dem Umfang eine Kathetenlänge und eine halbe Hypotenusenlänge bei. Beim ersten Dreieck kommt eine zusätzliche Kathete der Länge 4 cm dazu.
Die halbe Hypotenusenlänge vom ersten Dreieck ist $\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.
Damit ist der Umfang

$$4 + \sum_{i=0}^{\infty} (4+2\sqrt{2}) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^i = 4 + (4+2\sqrt{2}) \cdot \frac{1}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} \approx 27.313708.$$

Lösung zu Aufgabe 17.22 ex-koch-schneeflocke

a) Die Anzahl ausgeführter Schritte wird hier mit n bezeichnet:



b) $U_0 = 3$, $U_1 = 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} = 4$, $U_2 = 3 \cdot 4^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{16}{3}$, $U_3 = 3 \cdot 4^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{9}$.
Die Anzahl Strecken wird in jedem Schritt vervierfacht, die Länge gedrittelt. Des Gesamtstrecke wächst also bei jedem Schritt um den Faktor $\frac{4}{3}$. Allgemein

$$U_n = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$$