10 Funktionen

Eine Funktion kann intuitiv als eine Art «Maschine» aufgefasst werden, die aus einem «Input» einen «Output» generiert. Z. B. ist die Maschine, die eine Zahl als Input entgegen nimmt, daraus die Wurzel zieht, davon die Gegenzahl nimmt und das Ergebnis dieser Berechnungen als Output liefert, eine Funktion.

$$\xrightarrow{\text{Input}} \boxed{\text{Maschine}} \xrightarrow{\text{Output}}$$

Unsere Beispielfunktion liefert beim Input 7 als Output $-\sqrt{7}$.

Der «Input» wird **Argument** genannt, der «Output» **Wert**.

Die **Definitionsmenge** besteht aus allen erlaubten Argumenten, gibt also an, was als Argument («Input») überhaupt zulässig ist. Im Beispiel sind als Argumente alle positiven reellen Zahlen und Null erlaubt; die maximal mögliche Definitionsmenge besteht also aus allen positiven reellen Zahlen und der Null. Die Definitionsmenge kann aber auch kleiner sein als maximal möglich (im Beispiel könnte man auch $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ als Definitionsmenge nehmen).

Die **Wertemenge** besteht mindestens aus allen möglichen Werten («Outputs»), die produziert werden können. In unserem Beispiel kommen alle negativen reellen Zahlen und die Null als Werte vor, die Wertemenge besteht also mindestens aus diesen Zahlen. Der Wertebereich kann aber auch grösser angegeben werden als minimal möglich (hier z. B. $\mathbb{R}$).

Statt Definitionsmenge sagt man auch *Definitonsbereich*, statt Wertemenge *Wertebereich*.

Definition 10.1 Funktion

Eine **Funktion** ist eine Vorschrift, die jedem Element einer Definitionsmenge **genau ein** Element einer Wertemenge zuordnet.

Funktion oder nicht?

- Jedem Schuhmodell eines Versandhauses wird der entsprechende Preis zugeordnet.
- Jeder Schülerin wird eine Zeugnisnote in Mathematik zugeordnet.
- Jeder Zeugnisnote werden die Schüler einer Klasse zugeordnet.
- Jeder natürlichen Zahl wird ihre Quadratzahl zugeordnet.
- Jedem Zeitpunkt wird die Position eines Smartphones zugeordnet.
- Jeder Position eines Smartphones werden die entsprechenden Zeitpunkte zugeordnet.

In der Mathematik interessieren wir uns in erster Linie für Funktionen, die Zahlen wieder Zahlen zuordnen; dabei betrachten wir fast immer Funktionen, die durch eine Formel beschrieben werden können.

10.1 Notation für einige Zahlenmengen

Die folgenden Schreibweisen sind beispielsweise nützlich zur Angabe von Definitions- und Wertemengen.

$\mathbb{R}^*$	(die Menge) alle(r) reellen Zahlen ausser der Null:	$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$
$\mathbb{R}^+$	(die Menge) alle(r) positiven reellen Zahlen:	$\mathbb{R}^+ =]0, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
$\mathbb{R}_0^+$	(die Menge) alle(r) positiven reellen Zahlen und der Null:	$\mathbb{R}_0^+ = [0, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
$\mathbb{R}^-$	(die Menge) alle(r) negativen reellen Zahlen:	$\mathbb{R}^- =]-\infty, 0[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$
$\mathbb{R}_0^-$	(die Menge) alle(r) negativen reellen Zahlen und der Null:	$\mathbb{R}^- =]-\infty, 0] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$

In derselben Weise definiert man die Mengen $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Q}_0^+$, $\mathbb{Q}^-$, $\mathbb{Q}_0^-$ und analog für $\mathbb{Z}$. Bei den natürlichen Zahlen verwendet man eigentlich nur die Notation $\mathbb{N}^+$.