c)

$$(x+4)x = x+4$$
$$\mathbb{L} = \underline{\qquad\qquad}$$

(Tipp: Finden Sie die zwei Lösungen durch Probieren, es sind ganze Zahlen zwischen -10 und 10.)

d)

$$(x+4)x = x+4 \qquad | \quad :(x+4)$$
$$\underline{\qquad\qquad\qquad}$$
$$\mathbb{L} = \underline{\qquad\qquad}$$

Merke

Das Dividieren einer Gleichung durch einem Term, der die Unbekannte x enthält, kann eine

✎ ____

Beim Dividieren durch einen Term, der die Unbekannte enthält, muss sichergestellt werden, dass der Term nicht Null ist. Das führt auf eine Fallunterscheidung. Beispiel:

$$(x-3)x = (x-3)$$

Fall 1: Division nicht möglich weil $(x-3) = 0$, also $x = 3$. In diesem Fall erhält man die Gleichung $0 = 0$ und damit eine wahre Aussage. $x = 3$ ist also eine Lösung der Gleichung!

Fall 2: $(x-3) \neq 0$. In diesem Fall darf man dividieren und verliert keine Lösung (die wurde in Fall 1 bereits berücksichtigt).

$$x = 1$$

Damit ist $\mathbb{L} = \{1, 3\}$.

Merke

Damit wir keine unvollständigen Lösungsmengen bekommen, müssen Verlustumformungen vermieden oder speziell behandelt werden. Gewinnumformungen jedoch lassen sich nicht vermeiden. Damit sich keine falschen Lösungen «einschmuggeln», prüfen wir am Schluss der Aufgabe alle Lösungen der Lösungsmenge.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \sqrt{3x-1} &= \sqrt{4x+1} \qquad | \quad \text{quadrieren} \qquad \textbf{Gewinnumformung!} \\ 3x-1 &= 4x+1 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Danach setzt man die gefundenen Lösungen in die Ausgangsgleichung ein. **Man macht die Probe:**

$$\begin{aligned} \sqrt{3\cdot(-2)-1} &= \sqrt{4\cdot(-2)+1} \\ \sqrt{-7} &= \sqrt{-7} \end{aligned}$$

ist falsch, da man von einer negativen Zahl keine Wurzel ziehen darf.
$x = -2$ ist also keine Lösung der Gleichung. Sie wurde durch eine Gewinnumformung "gewonnen".
Da wir keine weiteren Lösungen gefunden haben, ist die Lösungsmenge der Gleichung $\sqrt{3x-1} = \sqrt{4x+1}$ leer.
$\mathbb{L} = \{\} = \varnothing$.