b)

$$\begin{aligned} px-5 &= 2x+q && \mid -2x+5 \\ px-2x &= q+5 \\ x(p-2) &= q+5 \end{aligned}$$

Fall 1: Normalfall $\boxed{p-2 \neq 0}$. Lösung $x = \frac{q+5}{p-2}$.
Fall 2: Spezialfall $p-2=0$, also $\boxed{p=2}$. Man hat die Gleichung $0 = q+5$.
Fall 2.1: $\boxed{q \neq -5}$. $\mathbb{L} = \varnothing$.
Fall 2.2: $\boxed{q = -5}$. $\mathbb{L} = \mathbb{R}$.

c)

$$\begin{aligned} p^2x - px &= p^2 - 1 \\ x(p^2-p) &= p^2-1 \end{aligned}$$

Fall 1: Normalfall $p^2 - p \neq 0$, d.h. $p(p-1) \neq 0$, d.h. $\boxed{p \neq 0 \text{ und } p \neq 1}$.
Lösung $x = \frac{p^2-1}{p^2-p} = \frac{(p+1)(p-1)}{p(p-1)} = \frac{p+1}{p}$.
Fall 2: Spezialfall $\boxed{p=0}$. Man hat die Gleichung $0 = -1$, also $\mathbb{L} = \varnothing$.
Fall 3: Spezialfall $\boxed{p=1}$. Man hat die Gleichung $0 = 0$, also $\mathbb{L} = \mathbb{R}$.

Lösung zu Aufgabe 6.8 ex-lineare-wurzel-gleichungen

a)

$$\begin{aligned} \sqrt{3x+1} &= \sqrt{4x-1} && \mid (\cdot)^2 \quad \textbf{Gewinnumformung!} \\ 3x+1 &= 4x-1 && \mid -3x+1 \\ 2 &= x \end{aligned}$$

Probe: $\sqrt{3 \cdot 2 + 1} = \sqrt{4 \cdot 2 - 1}$, also $\sqrt{7} = \sqrt{7}$ und damit $\mathbb{L} = \{2\}$.

b)

$$\begin{aligned} \sqrt{x-5} &= \sqrt{7-x} && \mid (\cdot)^2 \quad \textbf{Gewinnumformung!} \\ x-5 &= 7-x && \mid +x+5 \\ 2x &= 12 && \mid :2 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Probe: $\sqrt{6-1} = \sqrt{7-6}$, also $\sqrt{1} = \sqrt{1}$ und damit $\mathbb{L} = \{6\}$.

c)

$$\begin{aligned} \sqrt{2x-6} &= \sqrt{8-5x} && \mid (\cdot)^2 \\ 2x-6 &= 8-5x && \mid +5x+6 \\ 7x &= 14 && \mid :7 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Probe: $\sqrt{4-6} = \sqrt{8-10}$, also $\sqrt{-2} = \sqrt{-2}$. Da Wurzeln nicht aus negativen Zahlen gezogen werden können, ist $\mathbb{L} = \{\} = \varnothing$.