6 Gleichungen

Dieses Kapitel basiert zu grossen Teilen auf den Unterrichtsunterlagen von Angelika Rupflin der Kantonsschule am Burggraben St. Gallen, die ihrerseits auf dem Fundus der Fachgruppe Mathematik basieren.

Aufgabe 6.1 In einer Prüfung gibt der Lehrer für 0 Punkte die Note 1 und für jeden weiteren Punkt 0.3 Notenpunkte. Welche Punktzahl gibt Note 4?

Lösungsschema:

1. Festlegen der Unbekannten (inkl. Masseinheit!): ✎
2. Übersetzen der Textinformation und Aufstellen der Gleichung: ✎
3. Auflösen der Gleichung: ✎
4. Antwort: ✎

6.1 Grundlegendes zu Gleichungen und ihren Lösungen

Eine Gleichung ist eine **Aussage**. Für Aussagen gibt es drei Möglichkeiten:

- Immer wahr. Z.B. $2+3+x=5+x$ oder $6\cdot 7=42$.
- Immer falsch. Z.B. $x+1=x$ oder $1=0$.
- Nur für gewisse Einsetzungen wahr. Z.B. $2x+3=6$ ist nur wahr für $x=\frac{3}{2}$.

Lösungen einer Gleichung sind alle möglichen Einsetzungen, die eine wahre Aussage ergeben. Alle möglichen Lösungen werden in der **Lösungsmenge** $\mathbb{L}$ zusammengefasst.
Manchmal möchte man die möglichen Einsetzungen einschränken, z.B. auf natürliche Zahlen. In solchen Fällen wird eine **Grundmenge** $\mathbb{G}$ angegeben, z.B. $\mathbb{G}=\mathbb{N}$. Wird nichts angegeben, gilt die Abmachung $\mathbb{G}=\mathbb{R}$ (alle reellen Zahlen).

Beispiele:	$2x+3=6$	$\mathbb{G}_1=\mathbb{Z}$	$\mathbb{L}_1=$
		$\mathbb{G}_2=\mathbb{Q}$	$\mathbb{L}_2=$
		$\mathbb{G}_3=\mathbb{R}$	$\mathbb{L}_3=$

Fehlt die Angabe der Grundmenge, so wird immer $\mathbb{R}$ verwendet.

Beispiele:	$x+1=1$	$\mathbb{L}_1=$
	$x+1=x$	$\mathbb{L}_2=$
	$(x-1)^2=x^2-2x+1$	$\mathbb{L}_3=$
	$x^2=25$	$\mathbb{L}_4=$

Um die Lösung einer Gleichung zu bestimmen, versucht man normalerweise, die Unbekannte zu *isolieren*.

6.2 Lineare Gleichungen

Definition 6.1 Lineare Gleichung

Eine Gleichung, die man in die Form

$$\boxed{a \cdot x = b} \qquad (\text{mit } a,\ b \in \mathbb{R})$$

bringen kann, heisst **lineare Gleichung**. *Hinweis: Eine lineare Gleichung kann auch als Polynom vom Grad 1 aufgefasst werden, das gleich Null gesetzt wird:* $ax - b = 0$.

Beispiel: $(x-1)^2 = (x+2)\cdot(x-2)$ ✎

Satz 1

Lineare Gleichungen $a \cdot x = b$ haben entweder **eine** Lösung, **keine** Lösung oder **unendlich viele** Lösungen.

$a \neq 0$	b beliebig	$a \cdot x = b$		$\mathbb{L} =$
$a = 0$	$b \neq 0$	$0 \cdot x = b$		$\mathbb{L} =$
$a = 0$	$b = 0$	$0 \cdot x = 0$		$\mathbb{L} =$

Aufgabe 6.2 Lösen Sie nach x auf:

a) $\dfrac{4x-5}{3} - \dfrac{2x-3}{6} = \dfrac{x}{2} - 1$ b) $4x(x-1) = (2x-1)^2 - 1$ c) $\dfrac{8x-3}{8} - \dfrac{8+3x}{3} = 0$

d) Für welche Werte des Parameters p hat die Gleichung $p(x+3) = 5(p-x)$ genau eine Lösung?

6.3 Gleichungen mit Parametern

Parameter sind zusätzliche Variablen, um gegebene, aber numerisch (noch) unbekannte Grössen darzustellen, wie z.B. ein Zinssatz. Es gilt z.B. die Formel $K_n = K_0 \cdot (1+p)^n$.

Wenn nicht anders erwähnt, werden Unbekannte mit x, y oder z bezeichnet; die Parameter mit a, b, c usw. Ziel ist es, die Gleichungen nach der Unbekannten aufzulösen.

Merke Strategie zum Lösen von Parametergleichungen

1. Vereinfache beide Seiten der Gleichung.
2. Bringe alle Terme mit der Unbekannten x auf eine Seite, die übrigen Terme auf die andere Seite.
3. Klammere x aus und dividiere die Gleichung durch den Begleitfaktor von x.

Beispiel: $a(x-b) = 2(ax-2a-bx)$✎

Aufgabe 6.3 Lösen Sie ohne Diskussion der Sonderfälle nach x, y oder z auf. Ohne Sonderfälle bedeutet, dass man annimmt, dass die Gleichungen genau eine Lösung haben.

a) $qx - x = q^2 - 1$ b) $2(bz - cz) = z + bz - c$ c) $(y-3p)^2 = 2y(y+3p)-y(y-1)$

6.3.1 Diskussion von Sonderfällen

Parametergleichungen können für bestimmte Werte der Parameter keine oder unendlich viele Lösungen besitzen. Man spricht dann bei diesen Parameterwerten von einem Sonderfall der Gleichung bzw. Lösungen.

Aufgabe 6.4 Lösen Sie mit Diskussion der Sonderfälle:

a) $ax + b = 3$ b) $px - 5 = 2x + q$ c) $p^2x - px = p^2 - 1$

6.4 Äquivalenz-, Gewinn- und Verlustumformungen

Definition 6.2 Äquivalenzumformungen

Äquivalenzumformungen sind Umformungen einer Gleichung, welche die Lösungsmenge der Gleichung nicht verändern:

- **Addieren und Subtrahieren** von beliebigen Termen[a] und Zahlen
- Multiplizieren mit Zahlen **ungleich Null** und dividieren durch Zahlen **ungleich Null**.

[a] Vorausgesetzt, die Terme sind für alle Werte der Unbekannten definiert.

Die Äquivalenzumformungen werden verwendet, um Gleichungen zu vereinfachen. Es gibt aber auch «problematische» Umformungen von Gleichungen, die Sie jetzt kennen lernen werden:

6.4.1 Lernaufgabe

Lösen Sie die folgenden Aufgaben der Reihe nach und füllen Sie die Lücken aus!

Aufgabe 6.5 Gegeben ist die Gleichung $x = 3$

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der Gleichung

$$\mathbb{L} = \underline{\qquad\qquad}$$

b) Quadrieren Sie beide Seiten der Gleichung und bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der neuen Gleichung!

$$x = 3 \qquad | \quad (\dots)^2$$

$$\underline{\qquad\qquad}$$

$$\mathbb{L} = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

Sie haben die Aufgaben a) und b) richtig gelöst, wenn die Lösungsmenge aus b) ein Element mehr besitzt als die aus a).

Merke Quadrieren ist eine Gewinnumformung

Aus diesem Grund ist das Quadrieren einer Gleichung eine **Gewinnumformung**: Man kann dabei eine (oder mehrere) Lösung(en) gewinnen.

Merke Verlustumformung

Umgekehrt kann man bei einer **Verlustumformung** einer Gleichung eine oder mehrere Lösungen verlieren.

Man sieht das in der nächsten Aufgabe:

Aufgabe 6.6 Betrachten Sie die Gleichung $x^4 = 16$

a) Geben Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der Gleichung an! (Vorsicht: es gibt 2 Lösungen)

$$\mathbb{L} = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

b) Ziehen Sie beiden Seiten der Gleichung die Wurzel und geben Sie wieder die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ an.

$$x^4 = 16 \quad | \quad \sqrt{\cdot}$$

$$\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\mathbb{L} = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

c) Vergleichen Sie die Lösungsmengen aus a) und b)! Sie sind ________ .

d) Ziehen Sie nochmals auf beiden Seiten die Wurzel und geben Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ an!

$$x^2 = 4 \quad | \quad \sqrt{\cdot}$$

$$\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\mathbb{L} = \_\_\_$$

Merke

Das beidseitige Wurzelziehen einer Gleichung kann eine ✎ ________________ sein.

Übrigens sieht man in der Aufgabe 6.6, dass man nicht in jedem Fall bei einer Verlust- oder Gewinnumformung eine Lösung verliert bzw. gewinnt. Bei b) verliert man keine, bei d) verliert man eine Lösung.

Aufgabe 6.7 Bestimmen Sie die Lösungsmengen und füllen Sie die Lücken aus:

a)

$$x - 2 = 0$$

$$\mathbb{L} = \_\_\_\_\_\_$$

b)

$$x - 2 = 0 \quad | \quad \cdot (x+1)$$

$$(x-2)(x+1) = 0$$

$$\mathbb{L} = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

(Tipp: Ein Produkt ist dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist.)

Merke

Das Multiplizieren einer Gleichung mit einem Term, der die Variable x enthält, kann eine
✎ ________________________

c)

$$(x+4)x = x+4$$
$$\mathbb{L} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

(Tipp: Finden Sie die zwei Lösungen durch Probieren, es sind ganze Zahlen zwischen -10 und 10.)

d)

$$(x+4)x = x+4 \qquad | \quad :(x+4)$$

$$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\mathbb{L} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Merke

Das Dividieren einer Gleichung durch einem Term, der die Unbekannte x enthält, kann eine
✎ ________________________

Beim Dividieren durch einen Term, der die Unbekannte enthält, muss sichergestellt werden, dass der Term nicht Null ist. Das führt auf eine Fallunterscheidung. Beispiel:

$$(x-3)x = (x-3)$$

Fall 1: Division nicht möglich weil $(x-3)=0$, also $x=3$. In diesem Fall erhält man die Gleichung $0=0$ und damit eine wahre Aussage. $x=3$ ist also eine Lösung der Gleichung!

Fall 2: $(x-3)\neq 0$. In diesem Fall darf man dividieren und verliert keine Lösung (die wurde in Fall 1 bereits berücksichtigt).

$$x = 1$$

Damit ist $\mathbb{L}=\{1,3\}$.

Merke

Damit wir keine unvollständigen Lösungsmengen bekommen, müssen Verlustumformungen vermieden oder speziell behandelt werden. Gewinnumformungen jedoch lassen sich nicht vermeiden. Damit sich keine falschen Lösungen «einschmuggeln», prüfen wir am Schluss der Aufgabe alle Lösungen der Lösungsmenge.

Beispiel:

$$\begin{array}{rcll} \sqrt{3x-1} & = & \sqrt{4x+1} & | \quad \text{quadrieren} \qquad \textbf{Gewinnumformung!} \\ 3x-1 & = & 4x+1 & \\ x & = & -2 & \end{array}$$

Danach setzt man die gefundenen Lösungen in die Ausgangsgleichung ein. **Man macht die Probe:**

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{3\cdot(-2)-1} & = & \sqrt{4\cdot(-2)+1} \\ \sqrt{-7} & = & \sqrt{-7} \end{array}$$

ist falsch, da man von einer negativen Zahl keine Wurzel ziehen darf.
$x=-2$ ist also keine Lösung der Gleichung. Sie wurde durch eine Gewinnumformung "gewonnen".
Da wir keine weiteren Lösungen gefunden haben, ist die Lösungsmenge der Gleichung $\sqrt{3x-1}=\sqrt{4x+1}$ leer.
$\mathbb{L}=\{\}=\varnothing$.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \frac{2x-1}{x-3} &= \frac{5x-10}{x-3} \quad &| \cdot (x-3) \quad &\textbf{Gewinnumformung!} \\ 2x-1 &= 5x-10 \\ 9 &= 3x \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Mache selbst die Probe und bestimme $\mathbb{L}$!
✎

Aufgabe 6.8

a) $\sqrt{3x+1} = \sqrt{4x-1}$

b) $\sqrt{x-5} = \sqrt{7-x}$

c) $\sqrt{2x-6} = \sqrt{8-5x}$

d) $\sqrt{2x+1} = x+1$

Aufgabe 6.9

a) $\dfrac{5x}{2x-3} = \dfrac{3x-10}{2x-3}$

b) $\dfrac{2x}{7x-1} = \dfrac{2-10x}{14x-2}$

c) $\dfrac{5x}{2x-3} = \dfrac{5x-10}{2x-3}$

6.5 Textaufgaben aus Algebra 1 S. 66 ff

Wenden Sie bei folgenden Aufgaben das Lösungsschema und die Darstellung wie in Aufgabe 6.1 auf Seite 36 an.

Aufgabe 6.10 Bestimme eine zweistellige (natürliche) Zahl mit folgender Eigenschaft: fügt man die Ziffer 3 einmal links und einmal rechts hinzu, so unterscheiden sich die entstehenden beiden Zahlen um 333.

Aufgabe 6.11 “Meine Tante”, sagt Simone, “ist jetzt 5-mal so alt wie ich. In 7 Jahren wird sie nur noch 3-mal so alt sein. Wie alt bin ich heute?”

Aufgabe 6.12 Ein Teil eines Kapitals von 70 350 Franken ist zu 6 % angelegt, der andere zu 5 %. Der Jahreszins des gesamten Kapitals beträgt 4 100 Franken. Wie gross sind die beiden Teile?

Aufgabe 6.13 Zu welcher Zeit (auf Hunderstelsekunden genau) zwischen 16 Uhr und 17 Uhr bilden die Zeiger einer Uhr einen rechten Winkel?

Aufgabe 6.14 Die Ortschaften A und B liegen 120 Bahnkilometer voneinander entfernt. Ein Zug verlässt A um 15.00 Uhr in Richtung B; seine mittlere Geschwindigkeit beträgt 72 km/h. Der Gegenzug verlässt B um 15.15 Uhr; seine mittlere Geschwindigkeit beträgt 88 km/h. Wann kreuzen sich die beiden Züge?

6.6 Einfache nicht lineare Gleichungen

Merke

Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens ein Faktor Null ist:

$$T_1 \cdot T_2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad T_1 = 0 \quad \text{oder} \quad T_2 = 0$$

Aufgabe 6.15

a) $(2x+7) \cdot (5x-8) \cdot (x^2+1) = 0$

b) $(x+4)(x^2-4) = 0$

c) $x^3 - 2x^2 + x = 0$

d) $x \cdot (x+6) = -9$

6.7 Übungsaufgaben

Aufgabe 6.16 Lösen Sie folgende Gleichungen nach x auf mit Diskussion aller Spezialfälle.

a) $p(px-1) = -2(2x-1)$ b) $a(x-3) = xb-2$ c) $x^2 - ba^2 = 0$

6.7.1 Schülerbeiträge

Aufgabe 6.17 Max, Isabella und Fabio haben zusammen CHF 251. Max hat CHF 27 mehr als Fabio, Isabella hat CHF 14 mehr als Max. Wie viel Geld besitzt Max?

Aufgabe 6.18 Eine Treppe hat 34 Stufen. Würde jede Stufe um 2.7cm höher gebaut, könnten damit 4 Stufen eingespart werden. Wie hoch ist eine Stufe in cm?

Aufgabe 6.19 Zwei Brüder sind 21 und 29 Jahre alt. Vor wie vielen Jahren war der ältere Bruder dreimal so alt wie der jüngere?

Aufgabe 6.20 Mia ist genau so viele Tage alt, wie Tim Wochen alt ist. Mia ist genau so viele Monate alt, wie Leo Jahre alt ist. Timo ist doppelt so alt wie Leo. Wie alt ist Timo, wenn alle zusammen 352 alt sind?

Aufgabe 6.21 Wenn x durch 8 dividiert wird kommt man auf die vierte Wurzel von x. Wie viel ist x?

Aufgabe 6.22 Kiara und ihre Mutter sind gemeinsam 68 Jahre alt. Vor 13 Jahren hatte Kiaras Mutter das vierfache Alter von dem welches Kiara in drei Jahren erreichen wird. Wie alt sind die beiden?

Aufgabe 6.23 Was ist die Länge und die Breite eines Rechtecks, wenn wir wissen dass der Umfang 380 cm beträgt und die Länge 20 cm länger ist als die Breite?

Aufgabe 6.24 3 rote Kugeln sind gleich schwer wie 4 orange Kugeln. 2 orange Kugeln sind gleich schwer wie 3 Grüne Kugeln. Wie viele grüne Kugeln muss ich auf eine Balkenwaage legen, um 2 rote Kugeln auszutarieren?

Aufgabe 6.25 Der Vater wäre fünfmal so alt wie der Altersunterschied des ältesten Sohnes und der jüngsten Tochter, wenn der älteste Sohn ein Jahr jünger wäre. Die Mutter hat ihr erstes Kind im Alter von 22 Jahren bekommen, zu diesem Zeitpunkt war der Vater genau 1.5-mal so alt wie seine Frau. Die Familie hat 3 Kinder, sie sind zusammen 30 Jahre alt. Das jüngste Kind durfte gerade erst den Film Schneewittchen schauen (ab 6).
Wie alt ist das mittlere Kind?

Aufgabe 6.26 Marvin hat 8 Bonbons und Kevin hat 4. Wie viele Bonbons hat Marianne, wenn sie die Summe von der Hälfte des Produkts zwischen der Summe von Marvins und Kevins Bonbons und denen von Marianne und der Wurzel vom Quadrat vom Quadrat von der Differenz von Kevins Bonbons und 1 hat.

Aufgabe 6.27 Drei gute Freunde sind in einer Band und haben vor 5 Wochen eine CD rausgebracht. Pro verkaufte CD erhalten sie 7 Fr. Die Produktion kostete sie 7'000 Fr. Wenn sie alle verkaufen verdienen sie 63'000 Fr.
Wie viele CDs produzierten sie?

Aufgabe 6.28 Karla, Klaus, Tomas, Berta, Hana und Mona sind sechs Geschwister. Die Summe aller ihrer Alter ist das Alter von Klaus verneunfacht. Karla ist die älteste von den sechs Kindern, sie ist 2.5 mal so alt wie Hana. Hana ist gleich alt wie Monas und Bertas Alter zusammengerechnet. Tomas ist zweimal so alt wie Mona und somit das zweitälteste Kind. Alle Kinder sind unter 11 Jahre alt und nur zwei haben die Spielgruppe schon hinter sich und sind entweder im Kindergarten oder schon in der Schule (ab 5). Mona und Klaus sind Zwillinge. Berta ist die jüngste und ist so alt wie Hanas und Monas Alter zusammen minus Tomas' Alter.
Wie alt ist jedes Kind?

6.8 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe 6.2 ex-komplexere-lineare-gleichungen

a)

$$\begin{aligned}
\frac{4x-5}{3} - \frac{2x-3}{6} &= \frac{x}{2} - 1 && |\cdot 6\\
2(4x-5)-(2x-3) &= 3x-6 &&\\
8x-10-2x+3 &= 3x-6 &&\\
6x-7 &= 3x-6 && |-3x+7\\
3x &= 1 && |:3\\
x &= \frac{1}{3} &&
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
4x(x-1) &= (2x-1)^2-1 &&\\
4x^2-4x &= 4x^2-4x+1-1 && |-4x^2+4x\\
0 &= 0 &&\\
\mathbb{L} &= \mathbb{R} &&
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\frac{8x-3}{8} - \frac{8+3x}{3} &= 0 && |\cdot 24\\
3(8x-3)-8(8+3x) &= 0 &&\\
24x-9-(64+24x) &= 0 &&\\
24x-9-64-24x &= 0 &&\\
-73 &= 0 &&\\
\mathbb{L} &= \varnothing &&
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
p(x+3) &= 5(p-x) &&\\
px+3p &= 5p-5x && |+5x-3p\\
px+5x &= 2p &&\\
x(p+5) &= 2p &&
\end{aligned}$$

Diese Gleichung hat genau dann eine Lösung, wenn $(p+5) \neq 0$, also wenn $p \neq -5$.

Lösung zu Aufgabe 6.3 ex-gleichungen-mit-parametern-ohne-diskussion

a)

$$\begin{aligned} qx - x &= q^2 - 1 \\ x(q-1) &= (q+1)(q-1) && \mid : (q-1) \\ x &= q+1 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 2(bz - cz) &= z + bz - c \\ 2bz - 2cz &= z + bz - c && \mid -z - bz \\ 2bz - 2cz - z - bz &= -c \\ z(2b - 2c - 1 - b) &= -c \\ z(b - 2c - 1) &= -c && \mid : (b - 2c - 1) \\ z &= -\frac{c}{b - 2c - 1} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} (y - 3p)^2 &= 2y(y + 3p) - y(y - 1) \\ y^2 - 6py + 9p^2 &= 2y^2 + 6py - (y^2 - y) \\ y^2 - 6py + 9p^2 &= y^2 + 6py + y && \mid -y^2 - 6py - y - 9p^2 \\ -12py - y &= -9p^2 \\ y(-12p - 1) &= -9p^2 && \mid : (-12p - 1) \\ y &= \frac{9p^2}{12p + 1} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 6.4 ex-gleichungen-mit-parametern-mit-diskussion

a)

$$\begin{aligned} ax + b &= 3 \\ ax &= 3 - b \end{aligned}$$

Fall 1: Normalfall $\boxed{a \neq 0}$. Lösung $x = \frac{3-b}{a}$.
Fall 2: Spezialfall $\boxed{a = 0}$. Man hat die Gleichung $0 = 3 - b$.
  Fall 2.1: $\boxed{b \neq 3}$. $\mathbb{L} = \varnothing$.
  Fall 2.2: $\boxed{b = 3}$. $\mathbb{L} = \mathbb{R}$.

b)

$$\begin{aligned} px - 5 &= 2x + q && \mid -2x+5 \\ px - 2x &= q + 5 \\ x(p-2) &= q+5 \end{aligned}$$

Fall 1: Normalfall $\boxed{p - 2 \neq 0}$. Lösung $x = \frac{q+5}{p-2}$.
Fall 2: Spezialfall $p - 2 = 0$, also $\boxed{p = 2}$. Man hat die Gleichung $0 = q + 5$.
Fall 2.1: $\boxed{q \neq -5}$. $\mathbb{L} = \varnothing$.
Fall 2.2: $\boxed{q = -5}$. $\mathbb{L} = \mathbb{R}$.

c)

$$\begin{aligned} p^2x - px &= p^2 - 1 \\ x(p^2 - p) &= p^2 - 1 \end{aligned}$$

Fall 1: Normalfall $p^2 - p \neq 0$, d.h. $p(p-1) \neq 0$, d.h. $\boxed{p \neq 0 \text{ und } p \neq 1}$.
Lösung $x = \frac{p^2-1}{p^2-p} = \frac{(p+1)(p-1)}{p(p-1)} = \frac{p+1}{p}$.
Fall 2: Spezialfall $\boxed{p = 0}$. Man hat die Gleichung $0 = -1$, also $\mathbb{L} = \varnothing$.
Fall 3: Spezialfall $\boxed{p = 1}$. Man hat die Gleichung $0 = 0$, also $\mathbb{L} = \mathbb{R}$.

Lösung zu Aufgabe 6.8 ex-lineare-wurzel-gleichungen

a)

$$\begin{aligned} \sqrt{3x+1} &= \sqrt{4x-1} && \mid (\cdot)^2 \quad \textbf{Gewinnumformung!} \\ 3x+1 &= 4x-1 && \mid -3x+1 \\ 2 &= x \end{aligned}$$

Probe: $\sqrt{3 \cdot 2 + 1} = \sqrt{4 \cdot 2 - 1}$, also $\sqrt{7} = \sqrt{7}$ und damit $\mathbb{L} = \{2\}$.

b)

$$\begin{aligned} \sqrt{x-5} &= \sqrt{7-x} && \mid (\cdot)^2 \quad \textbf{Gewinnumformung!} \\ x-5 &= 7-x && \mid +x+5 \\ 2x &= 12 && \mid :2 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Probe: $\sqrt{6-1} = \sqrt{7-6}$, also $\sqrt{1} = \sqrt{1}$ und damit $\mathbb{L} = \{6\}$.

c)

$$\begin{aligned} \sqrt{2x-6} &= \sqrt{8-5x} && \mid (\cdot)^2 \\ 2x-6 &= 8-5x && \mid +5x+6 \\ 7x &= 14 && \mid :7 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Probe: $\sqrt{4-6} = \sqrt{8-10}$, also $\sqrt{-2} = \sqrt{-2}$. Da Wurzeln nicht aus negativen Zahlen gezogen werden können, ist $\mathbb{L} = \{\} = \varnothing$.

d)

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+2x} &= x+1 && |(\cdot)^2 \\
1+2x &= x^2+2x+1 && |-2x-1 \\
0 &= x^2 \\
x &= 0
\end{aligned}$$

Probe: $\sqrt{1+2\cdot 0} = 0+1$, also $\sqrt{1} = 1$, also $1 = 1$, wahre Aussage. Also ist $\mathbb{L} = \{0\}$.

Lösung zu Aufgabe 6.9 ex-lineare-bruch-gleichungen

a)

$$\begin{aligned}
\frac{5x}{2x-3} &= \frac{3x-10}{2x-3} && |\cdot(2x-3) \qquad \text{Achtung } 2x-3 \neq 0 \\
5x &= 3x-10 && |-3x \\
2x &= -10 && |:2 \\
x &= -5
\end{aligned}$$

Probe: $(2\cdot(-5)-3) = -13 \neq 0$, also $\mathbb{L} = \{-5\}$.

b)

$$\begin{aligned}
\frac{2x}{7x-1} &= \frac{2-10x}{14x-2} && |\cdot 2\cdot(7x-1) \qquad \text{Achtung } 7x-1 \neq 0 \\
2\cdot 2x &= 2-10x && |+10x \\
14x &= 2 && |:14 \\
x &= \frac{1}{7}
\end{aligned}$$

Probe: $7\cdot\frac{1}{7} - 1 = 0$, also ist $x = \frac{1}{7}$ keine Lösung der Ursprungsgleichung und damit $\mathbb{L} = \varnothing$.

c)

$$\begin{aligned}
\frac{5x}{2x-3} &= \frac{5x-10}{2x-3} && |\cdot(2x-3) \qquad \text{Achtung } 2x-3 \neq 0 \\
5x &= 5x-10 && |-5x \\
0 &= -10
\end{aligned}$$

$\mathbb{L} = \varnothing$

Lösung zu Aufgabe 6.10 ex-lineare-gleichungen-texaufgaben-algebra1-s66ff-128

Unbekannte Zahl: z, Grundmenge $\mathbb{G} = \mathbb{N}$.
Ziffer 3 links hinzufügen ergibt: $300 + z$
Ziffer 3 rechts hinzufügen ergibt: $10z + 3$
Unterschied der Zahlen ist 333, also zwei Möglichkeiten:

$$\begin{aligned}
300+z-(10z+3) &= 333 \\
297-9z &= 333 && |-297 \\
-9z &= 36 && |:(-9) \\
z &= -4
\end{aligned}$$

$\mathbb{L} = \varnothing$ (die Lösung ist nicht natürlich).

$$\begin{aligned}
10z+3-(300+z) &= 333 \\
9z-297 &= 333 && |+297 \\
9z &= 630 && |:9 \\
z &= 70
\end{aligned}$$

$\mathbb{L} = \{70\}$. Da keine Gewinnumformungen gemacht wurden, ist die Probe mathematisch nicht nötig. Um Rechenfehler zu entdecken, ist die Probe aber doch sinnvoll: 703-370=333.

Lösung zu Aufgabe 6.11 ex-lineare-gleichungen-texaufgaben-algebra1-s66ff-138

Simones Alter heute: x [Jahre]. In 7 Jahren: $x+7$.

Alter Simones Tante heute: $5x$ [Jahre]. In 7 Jahren: $5x+7$.

$$\begin{aligned} 3(x+7) &= 5x+7 & \\ 3x+21 &= 5x+7 & &| -3x-7 \\ 14 &= 2x & &| :2 \\ 7 &= x & \end{aligned}$$

Simone ist heute 7 Jahre alt.

Lösung zu Aufgabe 6.12 ex-lineare-gleichungen-texaufgaben-algebra1-s66ff-144

1. Teil des Kapitals: x [Franken]. Jahreszins: $0.06x$.
2. Teil des Kapitals: $70350-x$. Jahreszins $0.05(70350-x)$.

$$\begin{aligned} 0.06x+0.05(70350-x) &= 4100 & \\ 0.01x+3517.5 &= 4100 & &| -3517.5 \\ 0.01x &= 582.5 & &| :0.01 \\ x &= 58250 & \end{aligned}$$

Der zu 6% verzinste Teil beträgt 58250 Franken, der zu 5% verzinste Teil 12100 Franken.

Lösung zu Aufgabe 6.13 ex-lineare-gleichungen-texaufgaben-algebra1-s66ff-163

Gesuchte Uhrzeit in Minuten nach 16 Uhr: x [min]

Winkel des Minutenzeigers: $6x$ [°] (12 Uhr = 0°)

Winkel des Stundenzeigers: $120+\frac{1}{2}x$ [°] (16 Uhr = 120°, pro Stunde 30°, also pro Minute 0.5°.)

Unterschied der Winkel muss 90 [°] sein. Es gibt also zwei Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} 6x-(120+\frac{1}{2}x) &= 90 & \\ \frac{11}{2}x-120 &= 90 & &| +120 \\ \frac{11}{2}x &= 210 & &| :\frac{11}{2} \\ x = \frac{420}{11} &\approx 38.182 & \end{aligned}$$

Der rechte Winkel entsteht ungefähr zur Zeit 16:38:10.91.

$$\begin{aligned} 120+\frac{1}{2}x-6x &= 90 & \\ -\frac{11}{2}x+120 &= 90 & &| -90+\frac{11}{2}x \\ 30 &= \frac{11}{2}x & &| :\frac{11}{2} \\ \frac{60}{11} &= x \approx 5.455 & \end{aligned}$$

Der rechte Winkel entsteht ungefähr zur Zeit 16:05:27.27.

Lösung zu Aufgabe 6.14 ex-lineare-gleichungen-texaufgaben-algebra1-s66ff-165

Fahrzeit des Zugs A bis zum Kreuzen: x [h]

Fahrzeit des Zugs B bis zum Kreuzen: $x-\frac{1}{4}$ [h]

Zurückgelegte Strecke von A ($s=v\cdot t$): $72x$ [km]

Zurückgelegte Strecke von B ($s=v\cdot t$): $88\left(x-\frac{1}{4}\right)$ [km]

$$\begin{aligned} 72x+88\left(x-\frac{1}{4}\right) &= 120 & \\ 160x-22 &= 120 & &| +22 \\ 160x &= 142 & &| :160 \\ x = 0.8875\,\text{h} &= 53.2\,\text{min} & \end{aligned}$$

Die Züge kreuzen sich nach 53 Minuten und 15 Sekunden, also um 15:53 Uhr und 15 Sekunden.

⚒ Lösung zu Aufgabe 6.15 ex-spezielle-nichtlineare-gleichungen

a)

$$(2x+7)\cdot(5x-8)\cdot(x^2+1)=0$$

Damit das Produkt Null ist, muss einer der Faktoren Null sein:

$$\begin{aligned} 2x+7&=0 \\ x&=-\frac{7}{2} \\ \mathbb{L}_1&=\{-\frac{7}{2}\} \end{aligned} \qquad \text{oder} \qquad \begin{aligned} 5x-8&=0 \\ x&=-\frac{8}{5} \\ \mathbb{L}_2&=\{-\frac{8}{5}\} \end{aligned} \qquad \text{oder} \qquad \begin{aligned} x^2+1&=0 \\ x^2&=-1 \\ \mathbb{L}_3&=\varnothing \end{aligned}$$

Und damit: $\mathbb{L}=\{-\frac{7}{2},-\frac{8}{5}\}$

b)

$$(x+4)(x^2-4)=0$$

Damit das Produkt Null ist, muss einer der Faktoren Null sein:

$$\begin{aligned} x+4&=0 \\ x&=-4 \end{aligned} \qquad \text{oder} \qquad \begin{aligned} x^2-4&=0 \\ x^2&=4 \end{aligned}$$

Und damit: $\mathbb{L}=\{-4,-2,2\}$.

c)

$$\begin{aligned} x^3-2x^2+x&=0 \\ x(x-1)^2&=0 \end{aligned}$$

Damit das Produkt Null ist, muss einer der Faktoren Null sein:

$$x=0 \qquad \text{oder} \qquad x-1=0$$

Und damit: $\mathbb{L}=\{0,1\}$.

d)

$$\begin{aligned} x\cdot(x+6)&=-9 && \mid +9 \\ x^2+6x+9&=0 \\ (x+3)^2&=0 \\ x&=-3 \end{aligned}$$

⚒ Lösung zu Aufgabe 6.16 ex-gleichung-mit-parameterdiskussion

a)

$$\begin{aligned} p(px-1) &= -2(1-2x) && |\text{TU} \\ p^2x - p &= -2 + 4x && |+p-4x \\ p^2x - 4x &= p-2 && |\text{TU} \\ x(p^2-4) &= p-2 \end{aligned}$$

Fall 1: $p^2 - 4 = 0$, d.h. $\boxed{p = 2 \text{ oder } p = -2}$

Fall 1.1 $\boxed{p = 2}$. Eingesetzt erhält man $0 = 0$ und damit $\mathbb{L} = \mathbb{R}$.

Fall 1.1 $\boxed{p = -2}$. Eingesetzt erhält man $0 = -4$ und damit $\mathbb{L} = \emptyset$.

Fall 2: $\boxed{p \neq 2 \text{ und } p \neq -2}$

In diesem Fall kann dividiert werden und man erhält

$$x = \frac{p-2}{p^2-4} = \frac{p-2}{(p+2)(p-2)} = \frac{1}{p+2}$$

wobei gekürzt werden darf, da $p \neq 2$.

b)

$$\begin{aligned} a(x-3) &= xb - 2 && |\text{TU} \\ ax - 3a &= xb - 2 && |-xb+3a \\ ax - xb &= 3a - 2 && |\text{TU} \\ x(a-b) &= 3a-2 \end{aligned}$$

Fall 1: $\boxed{a = b}$

Man erhält die Gleichung $0 = 3a - 2$.

Fall 1.1: $\boxed{a = b = \frac{2}{3}}$, $\mathbb{L} = \mathbb{R}$

Fall 1.2: $\boxed{a = b \text{ und } a \neq \frac{2}{3}}$, $\mathbb{L} = \emptyset$

Fall 2: $\boxed{a \neq b}$

Man kann dividieren und erhält:

$$x = \frac{3a-2}{a-b}$$

c)

$$\begin{aligned} x^2 - ba^2 &= 0 && \mid + ba^2 \\ x^2 &= ba^2 \end{aligned}$$

Damit man die Wurzel ziehen kann, muss $b \geq 0$ sein.
Fall 1: $\boxed{b \geq 0}$
Achtung: Das beidseitige Wurzelziehen ist eine Verlustumformung. Man verliert die Gegenzahl der Wurzel, was man aber berücksichtigen kann:

$$x = \pm a\sqrt{b}$$

Fall 2: $\boxed{b < 0}$
Fall 2.1: $\boxed{b < 0 \text{ und } a = 0}$
In diesem Fall kann die Wurzel aus Null gezogen werden und man erhält

$$x = 0$$

Fall 2.2: $\boxed{b < 0 \text{ und } a \neq 0}$
In diesem Fall hat die Gleichung keine Lösung in $\mathbb{R}$, weil ein Quadrat niemals negativ sein kann (a^2 ist immer positiv). Also $\mathbb{L} = \emptyset$.

Lösung zu Aufgabe 6.17 ex-gleichungen-textaufgaben-schuelerbeitrag-lm

Unbekannte mit Masseinheit Vermögen von Max: x [CHF].

Aufstellen der Gleichung Vermögen Fabio: $x - 27$.
Vermögen Isabella: $x + 14$.
Alle zusammen: $x + (x - 27) + (x + 14) = 251$.

Lösen der Gleichung

$$\begin{aligned} x + (x - 27) + (x + 14) &= 251 && |\text{TU} \\ 3x - 13 &= 251 && \mid + 13 \\ 3x &= 264 && \mid : 3 \\ x &= 88 \end{aligned}$$

Antwortsatz Max besitzt CHF 88.

Lösung zu Aufgabe 6.18 ex-gleichungen-textaufgaben-schuelerbeitrag-lb

Unbekannte mit Masseinheit Höhe einer Stufe x [cm].

Aufstellen der Gleichung Höhe der Treppe jetzt: $34x$.
Höhe der Treppe nachher: $30(x + 2.7)$.
Die beiden Höhen sind gleich:

Lösen der Gleichung

$$\begin{aligned} 34x &= 30(x + 2.7) && |\text{TU} \\ 34x &= 30x + 81 && \mid - 30x \\ 4x &= 81 && \mid : 4 \\ x &= \frac{81}{3} \approx 20.33 \end{aligned}$$

Antwortsatz Eine Stufe misst $\frac{81}{3} \approx 20.33$ cm.

Lösung zu Aufgabe 6.19 ex-gleichungen-textaufgaben-schuelerbeitrag-ls

Unbekannte mit Masseinheit Gesuchte Anzahl Jahre früher: x [a].

Aufstellen der Gleichung Alter damals des jüngeren Bruders: $21 - x$.
Alter damals des älteren Bruders: $29 - x$.
Dreifaches Alter: $3(21 - x) = 29 - x$.

Lösen der Gleichung

$$\begin{aligned} 3(21-x) &= 29 - x && |\text{TU} \\ 63 - 3x &= 29 - x && | + 3x - 29 \\ 34 &= 2x && | : 2 \\ 17 &= x \end{aligned}$$

Antwortsatz Vor 17 Jahren war der jüngere Bruder 4 und der ältere 12 Jahre alt.

Lösung zu Aufgabe 6.20 ex-gleichungen-textaufgaben-schuelerbeitrag-cg

Unbekannte mit Masseinheit Alter von Timo in Jahren: x [a].

Aufstellen der Gleichung Alter von Leo: $\frac{x}{2}$.
Alter von Mia: $\frac{1}{12} \cdot \frac{x}{2} = \frac{x}{24}$.
Alter von Tim: $7 \cdot \frac{x}{24} = \frac{7x}{24}$.
Summe aller Alter in Jahren: 352.

Lösen der Gleichung

$$\begin{aligned} x + \frac{x}{2} + \frac{x}{24} + \frac{7x}{24} &= 352 && |\text{TU} \\ \frac{24x + 12x + x + 7x}{24} &= 352 && |\text{TU} \\ \frac{11}{6} \cdot x &= 352 && | \cdot \frac{6}{11} \\ x &= 192 \end{aligned}$$

Antwortsatz Timo ist also $6 \cdot 32 = 192$ Jahre alt.

Lösung zu Aufgabe 6.21 ex-gleichungen-textaufgaben-schuelerbeitrag-ln

$$\begin{aligned} \frac{x}{8} &= \sqrt[4]{x} && |(\cdot)^4 \quad \text{Achtung: Gewinnumformung} \\ \frac{x^4}{8^4} &= x && | : x \quad \text{Verlustumformung: } x = 0 \text{ ist ebenfalls eine Lösung!} \\ \frac{x^3}{8^4} &= 1 && | \cdot 8^4 \\ x^3 &= 2^{12} && |\sqrt[3]{\cdot} \quad x \text{ muss positiv sein, Wurzel darf gezogen werden} \\ x &= 2^4 = 16 \end{aligned}$$

Die gesuchte Zahl x ist entweder 16 oder 0.

Lösung zu Aufgabe 6.22 ex-gleichungen-textaufgaben-schuelerbeitrag-ok

Unbekannte mit Masseinheit Alter von Kiara in Jahren: x [a].

Aufstellen der Gleichung Alter der Mutter: $68 - x$.
Alter der Mutter von 13 Jahren: $68 - x - 13$.
Alter von Kiara in 3 Jahren: $3 + x$.

Lösen der Gleichung

$$\begin{aligned} 4(3+x) &= 68-x-13 && |\text{TU} \\ 12+4x &= 55-x && |+x-12 \\ 5x &= 43 && |:5 \\ x &= 8.6 \end{aligned}$$

Antwortsatz Kiara ist heute 8.6 Jahre alt, Ihre Mutter 59.4.

Lösung zu Aufgabe 6.23 ex-gleichungen-textaufgaben-schuelerbeitrag-kb

Unbekannte mit Masseinheit Breite des Rechtecks: x [cm].

Aufstellen der Gleichung Länge des Rechtecks: $x+20$.
Umfang: $2(x+x+20)$

Lösen der Gleichung

$$\begin{aligned} 2(x+x+20) &= 380 && |\text{TU} \\ 4x+40 &= 380 && |-40 \\ 4x &= 340 && |:4 \\ x &= 85 \end{aligned}$$

Antwortsatz Das Rechteck ist 85 cm breit und 105 cm lang.

Lösung zu Aufgabe 6.24 ex-gleichungen-textaufgaben-schuelerbeitrag-ml

Die Masseinheit hier ist das Gewicht einer roten Kugel. Damit können wir nun das Gewicht der anderen Kugeln ausdrücken:

Gewicht einer organgen Kugel: o, also $4o = 3$ und damit $o = \frac{3}{4}$.

Gewicht einer grünen Kugel: g, also $2o = 3g$, also $\frac{3}{2} = 3g$ und damit $g = \frac{1}{2}$.

Eine grüne Kugel ist also halb so schwer wie eine rote. Es braucht also 4 grüne Kugeln, um 2 rote Kugeln auszutarieren.

Lösung zu Aufgabe 6.25 ex-gleichungen-textaufgaben-schuelerbeitrag-emu

Die Geschlechterverteilung unter den Geschwistern ist nicht klar. Der älteste Sohn könnte auch das jüngste Kind mit zwei älteren Schwestern sein.

Wir nehmen an, dass das jüngste Kind ein Mädchen, und das älteste ein Junge ist.

Unbekannte mit Masseinheit Alter in Jahren des mittleren Kindes: x [a].

Aufstellen der Gleichung Alter des jüngsten Kindes: 6.
Alter des ältesten Kindes: $30-6-x = 24-x$.
Alter des Vaters: $5((24-x)-1-6) = 5(17-x) = 85-5x$.
Alter der Mutter: $22+(24-x) = 46-x$.
Alter des Vaters bei Geburt des ersten Kindes: $85-5x-(24-x) = 85-5x-24+x = 61-4x$.

Lösen der Gleichung

$$\begin{aligned} 61-4x &= 22\cdot 1.5 && |\text{TU} \\ 61-4x &= 33 && |-33+4x \\ 28 &= 4x && |:4 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Antwortsatz Das mittlere Kind ist 7 Jahre alt.

Lösung zu Aufgabe 6.26 ex-gleichungen-textaufgaben-schuelerbeitrag-ak

Anzahl Bonbons Marvin $m = 8$, Anzahl Bonbons Kevin $k = 4$.

Übersetzen in eine Formel für die Anzahl Bonbons Marianne x:

$$x = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{Hälfte}} \cdot (m+k) \underbrace{\cdot}_{\text{Produkt}} x \underbrace{+}_{\text{Summe}} \underbrace{\sqrt{((k-1)^2)^2}}_{\text{Wurzel vom Quadrat vom Quadrat von der Differenz von Kevins Bonbons und 1}}$$

Setzt man für m und k die entsprechenden Werte ein erhält man

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot x + 9 && |\text{TU} \\ x &= 6x + 9 && |-x-9 \\ -9 &= 5x && |:5 \\ -\frac{9}{5} &= x \end{aligned}$$

Marianne schuldet noch jemandem 1.8 Bonbons.

Lösung zu Aufgabe 6.27 ex-gleichungen-textaufgaben-schuelerbeitrag-eme

Unbekannte mit Masseinheit Anzahl CDs: x.

Aufstellen der Gleichung Einnahmen: $7x$.
Ausgaben: 7'000.
Gewinn: 63'000

Lösen der Gleichung

$$\begin{aligned} 63000 &= 7x - 7000 && |+7000 \\ 70000 &= 7x && |:7 \\ 10000 &= x \end{aligned}$$

Antwortsatz Die Band produzierte 10'000 CDs.

Lösung zu Aufgabe 6.28 ex-gleichungen-textaufgaben-schuelerbeitrag-sg

Alle Unbekannten beschreiben das Alter in Jahren und sind natürliche Zahlen:

Karla a, Klaus l, Tomas t, Berta b, Hanna h und Mona m.

Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{rl} 9l & = a + l + t + b + h + m \\ a & = 2.5h \\ h & = m + b \\ t & = 2m \\ m & = l(2) \\ b & = h + m - t \end{array}\right. \qquad (1)$$

6 Gleichungen reichen i.A. um 6 Variablen zu bestimmen. Die Vorgehensweise ist, eine Gleichung nach einer Variablen aufzulösen und diese in die anderen Gleichungen einzusetzen. So reduziert man immer um eine Variable und eine Gleichung.

Erst benutzen wir die Gleichungen (1) und (2) und setzen in die verbleibenden ein:

$$\left\{\begin{array}{rl} 9l & = 2.5h + l + t + b + h + l \\ h & = l + b \\ t & = 2l \\ b & = h + l - t \end{array}\right. \qquad (3)$$

Wir setzen (3) ein:

$$\left\{\begin{array}{rl} 9l & = 2.5h + l + 2l + b + h + l \\ h & = l + b \\ b & = h + l - 2l \end{array}\right. \qquad (4)$$

Wir setzen (4) ein

$$\begin{cases} 9l &= 2.5(l+b)+l+2l+b+l+b+l \\ b &= l+b+l-2l \end{cases}$$

Zusammenfassen:

$$\begin{cases} 9l &= 7.5l+4.5b & (5) \\ b &= b & (6) \end{cases}$$

Die Gleichung (6) ist eine wahre Aussage. D.h. das System hat unendlich viele Lösungen (konkret kann man z.B. b wählen und damit alles andere ausrechnen.)

Jetzt kommen die Zusatzbedingungen ins Spiel, nämlich, dass die Lösungen ganze Zahlen sein müssen und dass

$$a \geq l, t, b, h, m \qquad \text{und} \qquad a \leq 11 \qquad \text{und genau zwei Variablen sind} \geq 5$$

Weiter mit Gleichung (5):

$$\begin{aligned} 9l &= 7.5l + 4.5b & &\mid -7.5l \\ 1.5l &= 4.5b & &\mid : 1.5 \\ l &= 3b \end{aligned}$$

D.h. das Alter l von Klaus ist ein Vielfaches von 3. Wir nehmen nun b als gegeben an, und drücken alle anderen Alter damit aus.

Aus Gleichung (4) erhalten wir: $h = 4b$.

Aus Gleichung (3) erhalten wir: $t = 2l = 6b$.

Aus Gleichung (1) erhalten wir: $a = 2.5h = 10b$.

Weil die Alter natürliche Zahlen kleiner als 11 sind, bleibt nur die Lösung $a = 10$ und $b = 1$. (Die Lösung $b = 0$ kann verworfen werden, weil Klara dann auch Null Jahre alt wäre und niemand älter als 5 Jahre wäre).

Damit haben wir folgende Lösung:

Karla 10, Klaus 3, Tomas 6, Berta 1, Hanna 4 und Mona 3.