11.3.1 2 Variablen, 2 lineare Gleichungen

Die Lösungen einer einzelnen linearen Gleichung mit zwei Variablen entsprechen normalerweise den Koordinaten aller Punkte auf einer Geraden. Die Gerade kann sogar vertikal sein, z.B. $x + 0y = 4$.

Der Spezialfall, wo gar keine Variable vorkommt, interessiert uns wenig: Er führt entweder auf eine nicht lösbare Gleichung (z.B. $0x + 0y = 1$) oder auf eine stets wahre Gleichung $0x + 0y = 0$. Im ersten Fall hat das System keine Lösung, im zweiten Fall sind alle Punkte (x, y) der Ebene Lösungen.

Die Lösung eines linearen Gleichungssystems mit 2 Variablen und 2 Gleichungen entspricht im Normalfall den Koordinaten des Schnittpunkts der beiden Geraden, die man aus den beiden beteiligten Gleichungen erhält. Es gibt somit 3 Fälle:

Fall 1: ✎

Fall 2: ✎

Fall 3: ✎

11.3.2 3 Variablen, 3 lineare Gleichungen

Wenn man wie oben von Spezialfällen absieht, entsprechen die Lösungen einer einzelnen linearen Gleichung in drei Variablen den Punkten einer Ebene im Raum. (Warum und dass das so ist, werden wir später in der Vektorgeometrie untersuchen). Im Allgemeinen schneiden sich zwei Ebenen in einer Geraden (vgl. Rücken eines Schulhefts). Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems aus drei Gleichungen in drei Variablen entspricht also der Schnittmenge dreier Ebenen. (Diese Schnittmenge besteht im Normalfall aus genau einem Punkt, sie kann aber auch leer oder eine Gerade oder eine Ebene sein, vgl. die folgende Diskussion.) Es ergeben sich folgende Fälle:

- Fall 1: Je zwei der drei Ebenen sind parallel zueinander oder gleich.
  - Falls zwei der drei Ebenen verschieden sind, gibt es keine Lösung.
  - Sonst sind alle drei Ebenen gleich und alle Punkte dieser Ebene sind Lösungen.
- Fall 2: Genau zwei der drei Ebenen sind parallel zueinander oder gleich. (Dann ist die dritte nicht parallel zu jeder diese beiden.)
  - Falls diese beiden parallelen Ebenen verschieden sind, gibt es keine Lösung.
  - Sonst bilden sie eine Ebene, die die dritte in einer Geraden schneidet; die (Koordinaten der) Punkte dieser Geraden sind die Lösungen.
- Fall 3: Keine zwei der drei Ebenen sind parallel zueinander oder gleich. Dann schneiden sich je zwei der drei Ebenen in einer Geraden.

  Wir betrachten eine beliebige der drei Ebenen. Sie enthält dann zwei Schnittgeraden (mit den anderen beiden Ebenen).
  - Fall 3.1: Diese beiden Schnittgeraden sind parallel und verschieden: Es gibt keine Lösung. (Dies ist wohl die Toblerone-Situation)
  - Fall 3.2: Diese beiden Schnittgeraden stimmen überein. Dann schneiden sich die drei Ebenen in dieser Geraden, und die (Koordinaten der) Punkte dieser Geraden sind die Lösungen.
  - Fall 3.3: Diese beiden Schnittgeraden schneiden sich in einem Punkt. Dann ist dieser Punkt (oder seine Koordinaten) die einzige Lösung.