Lösung zu Aufgabe 11.7 ex-lineare-gleichungssysteme-mit-umformungen-und-bruechen

a) $\left\{\begin{array}{ll} \frac{4}{x+y} = 8 & \mid \cdot (x+y) \quad ⚠ (x+y) \neq 0 \\ \frac{\frac{2}{13}}{x} = -\frac{\frac{1}{3}}{y} & \mid \cdot xy \quad ⚠ x \neq 0 \text{ und } y \neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 4 = 8(x+y) & \mid : 4 \\ \frac{2}{13} \cdot y = -\frac{1}{3} \cdot x & \mid \cdot 39 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\left\{\begin{array}{lll} 1 & = 2x + 2y & (G_1) \\ 6y & = -13x & (G_2) \end{array}\right.$

(G_1) nach y aufgelöst: $y = -\frac{13}{6}x$ (G_1'). Eingesetzt in (G_1):

$$\begin{aligned} 1 &= 2x + 2 \cdot \left(-\frac{13}{6}x\right) \\ 1 &= \frac{6}{3}x - \frac{13}{3}x \\ 1 &= -\frac{7}{3}x && \mid : -\frac{7}{3} \\ -\frac{3}{7} &= x \end{aligned}$$

Eingesetzt in (G_1'): $y = -\frac{13}{6} \cdot \left(-\frac{3}{7}\right) = \frac{13}{14}$.
Lösung: $x = -\frac{3}{7}$, $y = \frac{13}{14}$.

b) $\left\{\begin{array}{lll} xy & = -1 & (G_1) \\ 2x + \frac{1}{y} & = \frac{23}{42} & (G_2) \quad ⚠ y \neq 0 \end{array}\right.$ (G_1) nach y aufgelöst: $y = -\frac{1}{x}$ (G_1'). Eingesetzt in (G_2):

$2x + \frac{1}{-\frac{1}{x}} = \frac{23}{42} \quad \Leftrightarrow \quad 2x - x = \frac{23}{42} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{23}{42}$

In (G_1') eingesetzt: $y = -\frac{1}{\frac{23}{42}} = -\frac{42}{23}$.
Lösung: $x = \frac{23}{42}$, $y = -\frac{42}{23}$.

c) $\left\{\begin{array}{lll} ax + y & = a + 2 & (G_1) \\ a^2x - y & = -1 & (G_2) \end{array}\right.$ y elminieren: $(G_1) + (G_2)$: $ax + a^2x = a + 2 - 1 \quad \Leftrightarrow$

$x(a + a^2) = a + 1 \quad \mid : (a + a^2) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{a+1}{a+a^2} = \frac{a+1}{a(a+1)} = \frac{1}{a}$

Eingesetzt in (G_1): $a \cdot \frac{1}{a} + y = a + 2 \quad \Leftrightarrow \quad y = a + 1$
Lösung: $x = \frac{1}{a}$, $y = a + 1$.

d) $\left\{\begin{array}{lll} (a-1)x + (a+1)y & = \frac{2}{a+1} & (G_1) \\ (a+1)x + (a+1)y & = \frac{2a}{a^2-1} & (G_1) \end{array}\right.$ y eliminieren: $(G_1) - (G_2)$:

$$\begin{aligned} (a-1)x - (a+1)x &= \frac{2}{a+1} - \frac{2a}{a^2-1} \\ x((a-1) - (a+1)) &= \frac{2}{a+1} - \frac{2a}{(a+1)(a-1)} \\ x(a - 1 - a - 1) &= \frac{2(a-1)}{(a+1)(a-1)} - \frac{2a}{(a+1)(a-1)} \\ x \cdot (-2) &= \frac{2(a-1) - 2a}{(a+1)(a-1)} && \mid : (-2) \\ x &= \frac{1}{(a+1)(a-1)} \end{aligned}$$

Eingesetzt in (G_1): $(a-1) \cdot \frac{1}{(a+1)(a-1)} + (a+1)y = \frac{2}{a+1} \quad \Leftrightarrow \quad (a+1)y = \frac{2}{a+1} - \frac{1}{a+1} \quad \mid : (a+1)$
$y = \frac{1}{(a+1)^2}$.
Lösung: $x = \frac{1}{a^2-1}$, $y = \frac{1}{(a+1)^2}$.

Lösung zu Aufgabe 11.8 ex-textaufgaben