Definition 21.0.1 Stetigkeit

Eine Funktion $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ ist **stetig**, wenn «der Graph der Funktion ohne Absetzen gezeichnet werden kann, d.h. wenn es keine Löcher oder Sprünge gibt».
Oder mathematisch präziser wenn gilt: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, $\forall x \in [a, b]$.

Aufgabe 21.3 Welche Funktionen aus Aufgabe Aufgabe 21.1 sind stetig? An welchen Stellen (t-Werte) sind die unstetigen Funktionen unstetig?

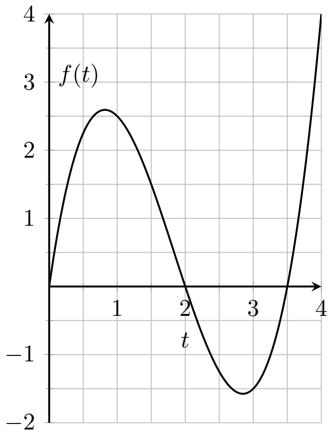
21.1 Fläche unter einem Funktionsgraphen

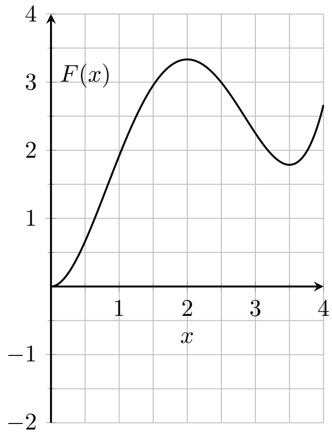
In den Aufgaben Aufgabe 21.1 und Aufgabe 21.2 haben wir effektiv Flächen unter einem Funktionsgraphen $f(t)$ bestimmt (bzw. angenähert). Wobei in der Aufgabe Aufgabe 21.1 die Flächen unter der x-Achse mit negativen Zahlen angegeben werden. Es handelt sich also um **vorzeichenbehaftete Flächen**.

Die Fläche kann einerseits näherungsweise berechnet werden, indem man die Fläche von oben und unten abschätzt. Die Grenzwerte dieser Schätzungen ergeben dann die exakte Fläche.

Alternativ können wir die Eigenschaften der Funktion $F(x)$ untersuchen, die die Fläche unter der stetigen Funktion $f(t)$ zwischen $t = 0$ und $t = x$ angibt.

Aufgabe 21.4 Überzeugen Sie sich, dass $F(x)$ tatsächlich der vorzeichenbehafteten Fläche unter dem Graphen $f(t)$ zwischen $t = 0$ und $t = x$ entspricht. Untersuchen Sie die Graphen auch auf «diskussionswürdige» Stellen.





Satz 21.1.1

Wenn $F(x)$ der vorzeichenbehafteten Fläche des Graphen von $f(t)$ und der x-Achse zwischen den Werten $t = 0$ und $t = x$ entspricht, dann gilt:
$$F'(x) = f(x)$$

Intuitiv kann man einsehen, dass $F(x)$ proportional zum Wert von $f(x)$ wächst.
Beweis: Die Ableitung ist definiert als der Grenzwert des Differenzenquotienten:

$$F'(x) = \qquad\qquad\qquad .$$

Die Differenz $F(x + h) - F(x)$ entspricht der Fläche unter $f(t)$ zwischen $t = x$ und $t = x + h$.
Diese Fläche ist grösser als die Rechtecksfläche $f_{\min} \cdot h$ und kleiner als die Rechtecksfläche $f_{\max} \cdot h$, wobei $f_{\min}$