das Minimum von f im Intervall $[x, x+h]$ ist und $f_{\max}$ das entsprechende Maximum. Es gilt also

$$\begin{aligned} &\leq \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leq \\ &\leq F'(x) \leq \quad . \end{aligned}$$

Weil f stetig ist, gilt $\lim\limits_{h\to 0} f_{\min} = \lim\limits_{h\to 0} f_{\max} = f(x)$. Und damit ist

$$f(x) \leq F'(x) \leq f(x),$$

also $F'(x) = f(x)$, was zu beweisen war.

Definition 21.1.2 Stammfunktion

Eine Funktion $F(x)$ heisst Stammfunktion der Funktion $f(x)$, wenn $F'(x) = f(x)$.

Aufgabe 21.5 Bestimmen Sie **alle** möglichen Stammfunktionen von

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = \mathrm{e}^x$ c) $f(x) = \sin(x)$.

Aufgabe 21.6 Seien $F(x)$ und $G(x)$ zwei unterschiedliche Stammfunktionen von $f(x)$. Zeigen Sie, dass sich $F(x)$ und $G(x)$ nur um eine Konstante unterscheiden. *Hinweis: Zeigen Sie, dass $F(x) - G(x)$ nicht von x abhängt, indem Sie ableiten.*

Definition 21.1.3 Unbestimmtes Integral

Die Menge aller Stammfunktionen einer Funktion f nennt man *unbestimmtes Integral* und schreibt dafür

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

und liest «Das Integral von $f(x)\,\mathrm{d}x$». C ist eine beliebige reelle Zahl und $F(x)$ eine beliebige Stammfunktion von $f(x)$.

Die Notation $\int$ steht für ein S, was für «Summe» steht. Es handelt sich um eine unendliche Summe unendlich kleiner Rechtecksflächen der Höhe $f(x)$ und der «infinitesimalen» Breite $\mathrm{d}x$.
Man vergleiche mit der Notation $f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, die für eine unendlich kleine Differenz der Funktionswerte geteilt durch eine unendlich kleine Differenz der x-Werte steht.
In der «Nicht-Standard-Analysis» werden den reellen Zahlen sogenannte Infinitesimale hinzugefügt, die grösser als 0, aber kleiner als jede positive reelle Zahl sind. Diese Erweiterung mathematisch sauber zu definieren ist sehr anspruchsvoll und wurde erst vor 60 Jahren erstmals erreicht. Intuitiv wurde diese Sicht aber schon von Leibniz, einem der Pionieren der Differential- und Integralrechnung und «Erfinder» dieser Notation, verwendet. Für diverse physikalische und geometrische Probleme, die mit Integralen formuliert werden können, ist es hilfreich, das Integral als unendliche Summe unendlich kleiner Teile zu betrachten.