Definition 21.1.4 Bestimmtes Integral

Für eine stetige Funktion f schreibt man für die Fläche zwischen $x = a$ und $x = b$ mit $b > a$ welche der Graph der Funktion mit der x-Achse einschliesst

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

und nennt es das *bestimmte Integral* der Funktion f *von a nach b*.
Hinweis: Die Fläche ist vorzeichenbehaftet. Jene unter der x-Achse ist negativ.

Für die Berechnung des konkreten Wertes des bestimmten Integral nehmen wir an, wir hätten die spezielle Stammfunktion $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, die uns die Fläche zwischen $t = 0$ und $t = x$ berechnet. Es gilt:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

Aufgabe 21.7 Sei $G(x)$ eine andere Stammfunktion von $f(x)$. Zeigen Sie, dass $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$ und dass damit obige Formel für alle Stammfunktionen gültig ist.

Theorem 21.1.5 Hauptsatz der Analysis

Sei $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Für alle $x_0 \in [a, b]$ ist

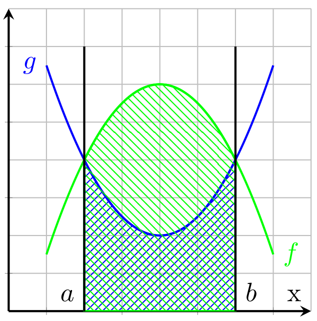
$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

eine Stammfunktion von $f(x)$, d.h. $F'(x) = f(x)$.
Weiter gilt für alle Stammfunktionen $F(x)$ von $f(x)$ und alle $c, d \in [a, b]$

$$\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x = F(d) - F(c).$$

Merke 21.1.6 Regeln für das bestimmte Integral

- $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
- $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$
- $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$
- Wenn $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, dann ist die eingeschlossene Fläche zwischen f und g gleich $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.



Aufgabe 21.8 Begründen Sie obige Regeln mit kommentierten Skizzen.