3. Erstellen Sie eine Tabelle, in der Sie die Strecke berechnen, welche drei Fahrzeuge Ihrer Wahl benötigen, um auf 100 km/h zu beschleunigen.

Aufgabe 21.12 Ein Massepunkt mit der Masse m ist an einer idealen, linearen Feder befestigt, d.h. einer Feder mit Federkonstante k, deren Kraft F proportional zur Auslenkung s ist, d.h. $F(s) = -k \cdot s$. Warum das negative Vorzeichen?

Ziel ist es, eine Funktion $s(t)$ zu bestimmen, die die Position des Punktes zu jedem Zeitpunkt beschreibt.

Für die Beschleunigung des Punktes gilt: $F(t) = m \cdot a(t)$, wobei $F(t) = -k \cdot s(t)$. Weiter gilt $a(t) = s''(t)$. Wir suchen also eine Funktion für die gilt:

$$-k \cdot s(t) = m \cdot s''(t).$$

a) Finden Sie eine Funktion, für die $s''(t) = -s(t)$ gilt.

b) Finden Sie eine Funktion, für die $s''(t) = -c^2 \cdot s(t)$ gilt, mit $c \in \mathbb{R}^+$. Welche physikalische Interpretation hat c?

c) Finden Sie eine Funktion, für die gilt $-k \cdot s(t) = m \cdot s''(t)$. Interpretieren Sie den Einfluss der Grössen k und m auf die Lösung.

Aufgabe 21.13 Man startet eine Bakterien-Kultur in einer Nährschale. Sei $N(t)$ die Anzahl Bakterien zu jedem Zeitpunkt t. Am Anfang kann davon ausgegangen werden, dass die Wachstumsrate proportional zur Anzahl Bakterien ist. Die Proportionalitätskonstante sei c und ist gegeben, z.B. durch die Art der Bakterien und Umgebungsbedingungen. Es gilt die Gleichung

$$N'(t) = c \cdot N(t) \qquad \text{mit } c \in \mathbb{R}^+.$$

a) Finden Sie (wenn möglich alle) Funktionen $N(t)$ für die $N'(t) = N(t)$ gilt.

b) Finden Sie (wenn möglich alle) Funktionen $N(t)$ für die $N'(t) = c \cdot N(t)$ gilt.

c) Was muss z.B. noch gegeben sein, um die Funktion $N(t)$ vollständig zu bestimmen?

Aufgabe 21.14 Eine Tasse Tee kühlt bei 0°C Umgebungstemperatur ab. Sei $T(t)$ die Temperatur des Tees zu jedem Zeitpunkt t. Die Abkühlrate ist proportional zu $T(t)$. Je heisser der Tee, desto grösser ist die momentane Abkühlrate. Sei c die entsprechende Proportionalitätskonstante. Stellen Sie die Differentialgleichung auf (d.h. eine Gleichung die $T(t)$ und $T'(t)$ enthält), und finden Sie Lösungen.

21.3 Längen, Flächen und Volumina

Aufgabe 21.15 Berechnen Sie die Einheitskreisfläche als bestimmtes Integral.

a) Bestimmen Sie den Funktionsterm einer Funktion $f(x)$ so, dass deren Graphen dem Viertelkreisbogen im ersten Quadranten entspricht.

b) Bestimmen Sie Fläche unter $f(x)$ und dann damit die Einheitskreisfläche.

Aufgabe 21.16 Wie lange ist der Parabelbogen der Funktion $f(x) = x^2$ von $x = 0$ bis $x = 1$?

Die Bogenlänge ergibt sich als unendliche Summe aus unendlich kleinen Bogenstückchen. Beispielhaft betrachten wir ein Stückchen bei einem bestimmten x-Wert (zur Veranschaulichung $x = 0.5$). Das dx zeichnen wir als Kathete im Stützdreieck in Übergrösse 0.5, das Bogenstückchen wird zu einem Abschnitt auf der Tangente. Berechnen Sie die Länge dieses Tangentenabschnitts. Formen Sie dann so um, dass dx ein Faktor ist und integrieren Sie dann diesen Ausdruck.