Merke 21.3.1 Bogenlänge eines Funktionsgraphen

Die Bogenlänge L einer (stetig differenzierbaren) Funktion $f(x)$ zwischen $x = a$ und $x = b$ beträgt

$$L = \int_a^b \sqrt{(f'(x))^2 + 1}\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 21.17 Ziel ist es, das Volumen der Einheitskugel zu berechnen. Dazu zerschneiden wir die Kugel in unendlich viele, unendlich flache Zylinder (d.h. Zylinder der Höhe $\mathrm{d}x$) und addieren deren Volumen.

Die Zylinderachsen entsprechen der x-Achse. Wir betrachten wieder die Funktion $f(x)$, deren Graph der oberen Hälfte des Einheitskreises entspricht.

An einer Stelle x (z.B. $x = 0.5$ zur Veranschaulichung) zeichnen wir einen Zylinder mit Radius $f(x)$ und «Höhe» $\mathrm{d}x$ ein.

Bestimmen Sie das Volumen einer solchen «Scheibe» und integrieren Sie dann von Hand, um das Volumen der Einheitskugel zu bestimmen.

Leiten Sie daraus das Volumen einer Kugel mit Radius r her.

Merke 21.3.2 Volumen eines Rotationskörpers

Das Volumen des Rotationskörpers, den man erhält, wenn man den Graphen einer (stetigen) Funktion $f(x)$ zwischen $x = a$ und $x = b$ um die x-Achse rotiert, beträgt

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 21.18 Berechnen Sie das Volumen eines geraden Kreiskegels als Volumen eines Rotationskörpers.

Aufgabe 21.19 Ziel ist es, die Oberfläche der Einheitskugel zu bestimmen.

Dazu zerschneiden wir die Kugeloberfläche wieder mit Ebenen senkrecht zur x-Achse. Die entstehenden schiefen Ringe betrachten wir näherungsweise als Rechtecke mit der Länge gleich dem Ringumfang und mit der Breite gleich der angenäherten Ringbreite (Bogenlänge des Funktionsgraphen). Diese Rechtecksflächen werden aufsummiert, um die Kugeloberfläche zu erhalten.

Die schiefen Ringe könnten auch als Mantelflächen von Kegelstümpfen aufgefasst werden. Der Unterschied zur oben vorgeschlagenen Rechtecksfläche ist allerdings von der Ordnung $(\mathrm{d}x)^2$ und kann daher vernachlässigt werden.

Merke 21.3.3 Oberfläche eines Rotationskörpers

Die Oberfläche eines Rotationskörpers, den man erhält, wenn man den Graphen einer (stetig differenzierbaren) Funktion $f(x)$ zwischen $x = a$ und $x = b$ um die x-Achse rotiert, beträgt

$$O = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 21.20 Ein Torus (wie z.B. ein Veloschlauch) wird durch zwei Grössen charakterisiert: R und r, wobei R der Entfernung von Schlauchmittelpunkt zum Radmittelpunkt entspricht und r dem halben Schlauchdurchmesser.

Berechnen Sie Volumen und Oberfläche eines Torus.

21.4 Standard-Aufgaben