



✂ **Aufgabe 21.21** Berechnen Sie vollständig von Hand die eingeschlossene Fläche zwischen den Graphen folgender Funktionen:

- a) $f(x) = -2x^2 - 3x + 2$ und $g(x) = -5x^2 + 3x + 26$ b) $f(x) = -2x^2 - x + 1$ und $g(x) = -4x^2 + 3x + 31$
 c) $f(x) = -x^2 - x + 1$ und $g(x) = -4x^2 + 2x + 19$ d) $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$ und $g(x) = -x^2 - 5x + 7$

✂ **Aufgabe 21.22** Mit Hilfe des TR, skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen für Werte zwischen 0 und 2:

$$f(x) = \sqrt{1 - (1-x)^2}, \quad g(x) = -3\sqrt{1 - \sqrt{\frac{x}{2}}}.$$

Spiegelt man die beiden Graphen an der y -Achse, erhält man eine geschlossene Figur. Berechnen Sie die Fläche dieser Figur.

✂ **Aufgabe 21.23** Ziel ist es, eine «schöne» Vase zu entwerfen. Diese soll als Rotationskörper eines Funktionsgraphen einer Funktion $f(x)$ konzipiert werden. Der Graph soll durch die Punkte $(0, 1)$ und $(6, 2)$ gehen. Die Steigungen der Tangenten in diesen Punkten sollen beide 1 sein. Damit haben wir vier Bedingungen, nämlich $f(0) = 1$, $f(6) = 2$, $f'(0) = 1$ und $f'(6) = 1$.

Als Ansatz sei $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ eine kubische Funktion. Bestimmen Sie die vier Koeffizienten mit Hilfe obiger Bedingungen.

Skizzieren Sie die Funktion und berechnen Sie dann die Oberfläche und das Volumen der so entstehenden Vase. Überprüfen Sie Ihre Resultate, indem Sie mit einem ähnlich grossen Zylinder vergleichen.

21.5 Integrationsregeln

Einige Ableitungsregeln haben eine Entsprechung als Integrationsregel. Diese Regeln sind sowohl für das unbestimmte Integral (Resultat ist eine Stammfunktion) wie für das bestimmte Integral (Resultat ist eine Zahl) gültig.

Merke 21.5.1 Integrationsregeln

Ableitungsregel

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Integrationsregel

$$\int c \cdot f(x) \, dx = c \cdot \int f(x) \, dx$$

$$\int (f(x) + g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$$

Aus der Produktregel $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ könnte die Regel zur «partiellen Integration» hergeleitet werden.

21.6 Repetitionsaufgaben

✂ **Aufgabe 21.24** Finden Sie folgende Stammfunktionen:

a) $\int x \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) dx$

b) $\int (2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)) dx$

c) $\int \sqrt{x} \, dx$

d) $\int (1+x)^2 dx$

✂ **Aufgabe 21.25** Berechnen Sie von Hand:

a) $\int_{-2}^3 \left(-\frac{1}{3}x^2 + 3x - \frac{1}{2} \right) dx$

b) $\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} \sin(x) - \frac{1}{3} \cos(x) \right) dx$

c) $\int_{-\ln(3)}^{\ln(5)} \sqrt{2} \cdot e^x \, dx$

d) $\int_1^{e^4} \frac{4}{x} \, dx$

e) $\int_1^4 \frac{2}{x^2} \, dx$

f) $\int_0^1 \cos(x^2) \cdot 2x \, dx$