Lösung zu Aufgabe 21.17 ex-kugelvolumen
$f(x) = \sqrt{1-x^2}$
$V_{\text{Zylinder}} = \pi(f(x))^2\,\mathrm{d}x.$

$$V_{\text{Einheitskugel}} = \int_{-1}^{1} \pi\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \pi(1-x^2)\,\mathrm{d}x = \pi(x-\frac{1}{3}x^3)\Big|_{-1}^{1} = \pi(1-\frac{1}{3}-(-1+\frac{1}{3})) = \frac{4\pi}{3}$$

Streckt man die Einheitskugel mit dem Streckungsfaktor r, erhält man eine Kugel mit Radius r. Das Volumen wird dabei mit r^3 multipliziert. Es gilt also:

$$V_{\text{Kugel}} = \frac{4\pi}{3}\cdot r^3$$

Lösung zu Aufgabe 21.18 ex-kegelvolumen
Erst müssen die gegebenen Grössen festgelegt werden. Typischerweise werden Kreiskegel durch ihre Höhe h und den Kreisradius r der Basis gegeben.

Einen solchen Kegel erhalten wir, wenn wir den Graphen einer linearen Funktion $f(x)$ um die x-Achse rotieren. Am einfachsten wählt man $f(0) = 0$ (Kegelspitze) und $f(h) = r$ (Basismittelpunkt). Also

$$f(x) = \frac{r}{h}x$$

Damit ist das gesuchte Volumen

$$V = \int_0^h \pi(f(x))^2\,\mathrm{d}x = \int_0^h \pi\left(\frac{r}{h}x\right)^2 \mathrm{d}x = \pi\frac{r^2}{h^2}\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_0^h = \pi\frac{r^2}{3h^2}\cdot h^3 - 0 = \frac{\pi}{3}r^2\cdot h$$

Lösung zu Aufgabe 21.19 ex-kugeloberflaeche
Wir betrachten die Kugel als Rotationskörper des Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ nach Rotation um die x-Achse.

Der Umfang eines Ringes an der Stelle x ist $2\pi f(x)$. Die infinitesimale Bogenlänge beträgt $\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$. Und damit beträgt die Rechtecksfläche $2\pi f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$. Die Oberfläche ist also

$$O_{\text{Kugel}} = \int_{-1}^{1} 2\pi f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} 2\pi\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)\right)^2}\,\mathrm{d}x =$$
$$2\pi\cdot\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi\cdot\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x =$$
$$2\pi\cdot\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = 2\pi\cdot\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x =$$
$$2\pi\cdot\int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}x = 2\pi\cdot\left(x\Big|_{-1}^{1}\right) = 2\pi\cdot 2 = 4\pi$$

Lösung zu Aufgabe 21.20 ex-torus
Ein Torus mit Radien R und r erhält man, wenn man den Kreis mit Radius r und Zentrum $(0,R)$ um die x-Achse rotiert.

Dazu betrachten wir den oberen Kreisbogen als Graphen einer Funktion $f(x)$ und den unteren Kreisbogen als Graphen einer Funktion $g(x)$:

$$f(x) = R+\sqrt{r^2-x^2} \qquad \text{und} \qquad g(x) = R-\sqrt{r^2-x^2}$$

Das Volumen kann nun als Differenz der Volumina der Rotationskörper der Graphen von $f(x)$ und $g(x)$ berechnet werden. Anstatt die ganzen Umformungen im Integral vorzunehmen, könnten im TR auch einfach die Funktionen