Lösung zu Aufgabe 21.28 ex-repe-weg-aus-beschleunigung

a) Skizze.

b) $a(t) = \begin{cases} \frac{1}{5}t & \text{für } 0 \leq t < 10 \\ -\frac{1}{5}(t-10)+2 & \text{für } 10 \leq t \leq 20 \end{cases}$

c) Die Geschwindigkeit zur Zeit t entspricht der Fläche unter der Beschleunigungskurve zwischen 0 und t. Für $t \leq 10$ erhält man:

$$v(t) = \int_0^t a(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^t \frac{1}{5}x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{10}x^2\Big|_0^t = \frac{1}{10}t^2$$

Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 10$ beträgt also $v(10) = \frac{1}{10} \cdot 10 = 10\,\mathrm{m/s}$.
Für $10 \leq t \leq 20$ gilt:

$$v(t) = 10 + \int_{10}^t a(x)\,\mathrm{d}x = 10 + \int_{10}^t \left(-\frac{1}{5}(x-10)+2\right)\mathrm{d}x = 10 + \left(-\frac{1}{10}x^2 + 4x\right)\Big|_{10}^t =$$
$$10 - \frac{1}{10}t^2 + 4t + 10 - 40 = -\frac{1}{10}t^2 + 4t - 20$$

Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 20$ beträgt also
$v(20) = -\frac{1}{10} \cdot 400 + 80 - 20 = -40 + 80 - 20 = 20\,\mathrm{m/s}$.

d) Die Positionsfunktion $s(t)$ entspricht der Fläche unter dem Geschwindigkeitsgraphen. Es gilt für $0 \leq t \leq 10$:

$$s(t) = \int_0^t v(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^t \frac{1}{10}x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{30}x^3\Big|_0^t = \frac{1}{30}t^3$$

Bis zum Zeitpunt $t = 10$ wurde eine Strecke von $s(10) = \frac{1}{30} \cdot 1000 = \frac{100}{3} \approx 33.33\,\mathrm{m}$ zurückgelegt.
Für $10 \leq t \leq 20$ gilt:

$$s(t) = \frac{100}{3} + \int_{10}^t v(x)\,\mathrm{d}x = \frac{100}{3} + \int_{10}^t \left(-\frac{1}{10}x^2 + 4x - 20\right)\mathrm{d}x = \frac{100}{3} + \left(-\frac{1}{30}x^3 + 2x^2 - 20x\right)\Big|_{10}^t =$$
$$\frac{100}{3} - \frac{1}{30}t^3 + 2t^2 - 20t + \frac{100}{3} - 200 + 200 = \frac{200}{3} - \frac{1}{30}t^3 + 2t^2 - 20t$$

Für $t = 20$ erhält man die Strecke nach $20\,\mathrm{s}$:
$s(20) = \frac{200}{3} - \frac{800}{3} + 800 - 400 = 200\,\mathrm{m}$

e) Nach $20\,\mathrm{s}$ hat die Bahn eine Geschwindigkeit von $20\,\mathrm{m/s} = 72\,\mathrm{km/h}$ und hat eine Strecke von $200\,\mathrm{m}$ zurückgelegt.

Lösung zu Aufgabe 21.29 ex-repe-rotationsvolumen

$$V = \pi\int_1^4 f(x)^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_1^4 \sqrt{x}^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_1^4 x\,\mathrm{d}x = \pi\frac{1}{2}x^2\Big|_1^4 = \frac{15}{2}\pi \approx 23.56$$

Der Topf hat einen Höhe von 3 und einen Radius von 1 am Boden und 2 oben. Das Volumen eines Zylinders mit gleicher Höhe und Radius 1.5 hat ein Volumen von $V = \pi r^2 h = \pi\frac{9}{4} \cdot 3 \approx 21.21$.
Das Resultat ist also plausibel.

Lösung zu Aufgabe 21.30 ex-skischanzenvolumen

Um die Funktion zu erhalten, die dem Verlauf der Schanze entspricht, muss die «normale» Sinus-Funktion $\sin(x)$ mit dem Faktor $\frac{20}{2\pi} = \frac{10}{\pi}$ in x-Richtung gestreckt werden: $(\sin\left(\frac{\pi}{10}x\right))$, dann um $+5$ Einheiten in x-Richtung verschoben werden: $(\sin\left(\frac{\pi}{10}(x-5)\right))$, und noch $+1$ in y-Richtung verschoben werden, also $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{10}(x-5)\right) + 1$.