$f(x)$ und $g(x)$ definiert werden und dann damit die Integrale berechnet werden.

$$O = \pi\int_{-r}^{r}(f(x))^2\,\mathrm{d}x - \pi\int_{-r}^{r}(g(x))^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_{-r}^{r}\left((f(x))^2-(g(x))^2\right)\mathrm{d}x =$$
$$\pi\int_{-r}^{r}\left(R^2+2R\sqrt{r^2-x^2}+(r^2-x^2)-(R^2-2R\sqrt{r^2-x^2}+(r^2-x^2))\right)\mathrm{d}x = \pi\int_{-r}^{r}4R\sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x =$$
$$4R\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x \stackrel{\text{TR}}{=} 4R\pi\cdot\frac{\pi r^2}{2} = 2\pi R\cdot\pi r^2$$

Beachten Sie die Schönheit der Formel: Umfang des Kreises durch die Schlauchmitte mal Querschnitssfläche des Schlauches. Ein Torus hat also das gleiche Volumen wie das eines Zylinders mit gleicher Grundfläche und Höhe gleich dem Umfang des Kreises durch die Schlauchmitte.
Die Oberfläche ist die Summe der Oberflächen der Rotationskörper der Graphen von $f(x)$ und $g(x)$.

$$V = 2\pi\int_{-r}^{r}f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x + 2\pi\int_{-r}^{r}g(x)\sqrt{1+(g'(x))^2}\,\mathrm{d}x =$$
$$2\pi\int_{-r}^{r}\left(f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}+g(x)\sqrt{1+(g'(x))^2}\right)\mathrm{d}x =$$
$$2\pi\int_{-r}^{r}\left(\left(R+\sqrt{r^2-x^2}\right)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{r^2-x^2}}\cdot(-2x)\right)^2}+\left(R-\sqrt{r^2-x^2}\right)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{1}{-2\sqrt{r^2-x^2}}\cdot(-2x)\right)^2}\right)\mathrm{d}x =$$
$$2\pi\int_{-r}^{r}\left(\left(R+\sqrt{r^2-x^2}\right)\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}+\left(R-\sqrt{r^2-x^2}\right)\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\right)\mathrm{d}x =$$
$$2\pi\int_{-r}^{r}\left(\left(R+\sqrt{r^2-x^2}\right)\cdot\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}+\left(R-\sqrt{r^2-x^2}\right)\cdot\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\right)\mathrm{d}x =$$
$$2\pi\int_{-r}^{r}\left(\left(R+\sqrt{r^2-x^2}\right)\cdot r\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}+\left(R-\sqrt{r^2-x^2}\right)\cdot r\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)\mathrm{d}x =$$
$$2\pi\int_{-r}^{r}r\left(\frac{R}{\sqrt{r^2-x^2}}+1+\frac{R}{\sqrt{r^2-x^2}}-1\right)\mathrm{d}x =$$
$$4\pi r\int_{-r}^{r}\frac{R}{\sqrt{r^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = 4\pi rR\int_{-r}^{r}\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,\mathrm{d}x \stackrel{\text{TR}}{=} 4\pi rR\cdot\pi = (2\pi R)\cdot(2\pi r)$$

Beachten Sie die Schönheit der Formel: Umfang des Kreises durch die Schlauchmitte mal Querschnitssfläche des Schlauches. Oder das gleiche Volumen wie das eines Zylinders mit gleicher Grundfläche und Höhe gleich dem Umfang des Kreises durch die Schlauchmitte. Ein Torus hat also die gleiche Oberfläche wie die Mantelfläche eines Zylinders mit gleicher Grundfläche und Höhe gleich dem Umfang des Kreises durch die Schlauchmitte.

Lösung zu Aufgabe 21.21 ex-flaeche-zwischen-parabeln

a) Erst werden die Schnittpunkte der Graphen mit folgender Gleichung bestimmt: $f(x) = g(x)$, bzw. $g(x) - f(x) = 0$.
$g(x) - f(x) = -2x^2 - 3x + 2 - \left(-5x^2 + 3x + 26\right) = -3x^2 + 6x + 24 = 0$
$-3\cdot\left(x^2 - 2x - 8\right) = 0$, also $-3\cdot(x+2)(x-4) = 0$, also $x = -2$ oder $x = 4$. (Man sucht zwei Zahlen mit Produkt -8 und Summe -2).
Damit die Fläche zwischen den Nullstellen positiv ist, muss der Öffnungsfaktor (Koeffizient von x^2) von $g(x) - f(x)$ negativ sein, was hier der Fall ist.
Die Fläche zwischen $f(x)$ und $g(x)$ ist $\displaystyle\int_{-2}^{4} -3\cdot(g(x)-f(x))\,\mathrm{d}x = -3\cdot\int_{-2}^{4}\left(x^2-2x-8\right)\mathrm{d}x =$
$-3\cdot\left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x\right)\Big|_{-2}^{4} = -3\cdot\left(\left(\frac{1}{3}\cdot 64 - \cdot 16 - 8\cdot 4\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot(-8) - \cdot 4 - 8\cdot(-2)\right)\right) =$
$-3\cdot\left(\left(\frac{64}{3} - 16 - 32\right) - \left(-\frac{8}{3} - 4 + 16\right)\right) = -3\cdot\left(\left(\frac{64}{3} - \frac{48}{3} - \frac{96}{3}\right) - \left(-\frac{8}{3} - \frac{12}{3} + \frac{48}{3}\right)\right) = -3\cdot\left(-\frac{80}{3} - \frac{28}{3}\right) =$
$-3\cdot -36 = 108$