e) $\displaystyle\int_1^4 \frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x = 2\cdot\int_1^4 x^{-2}\,\mathrm{d}x = 2\cdot\left(-x^{-1}\right)\Big|_1^4 = -2\cdot(\frac{1}{4}-1) = 2\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{2}$

f) $\displaystyle\int_0^1 \cos(x^2)\cdot 2x\,\mathrm{d}x = \sin(x^2)\Big|_0^1 = \sin(1)-\sin(0) = \sin(1)$ (*Hat die Form* $f'(g(x))\cdot g'(x)$*.*)

Lösung zu Aufgabe 21.26 ex-repe-komplizierte-integrale-ueberpruefen

Man leitet die Stammfunktion ab und muss den Integranden (das im Integral) erhalten.

a) $((x-1)\cdot\mathrm{e}^x + C)' = (x\cdot\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C)' = \mathrm{e}^x + x\cdot\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x = x\cdot\mathrm{e}^x$

b) $(x\ln(x) - x + C)' = 1\cdot\ln(x) + x\cdot\dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x)$

c)

$$\left(\frac{x^2\ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4} + C\right)' = \left(\frac{1}{2}\cdot x^2\cdot\ln(x) - \frac{1}{4}\cdot x^2 + C\right)' =$$
$$\frac{1}{2}\left(2x\cdot\ln(x) + x^2\cdot\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}x = x\cdot\ln(x) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x = x\cdot\ln(x)$$

d)

$$\left(\frac{1}{3}(\cos(x))^3 - \cos(x) + C\right)' = \cos(x)^2\cdot(-\sin(x)) + \sin(x) = (1-\sin(x)^2)\cdot(-\sin(x)) + \sin(x) =$$
$$-\sin(x) + \sin(x)^3 - \sin(x) = \sin(x)^3$$

Man verwendet $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$.

Lösung zu Aufgabe 21.27 ex-repe-flaeche-zwischen-kurve

a) $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = x^2 - \frac{\pi^2}{4}$. Man stellt fest, dass beide Funktionen bei $\pm\frac{\pi}{2}$ Nullstellen haben. Die Fläche beträgt also

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos(x) - x^2 + \frac{\pi^2}{4}\right)\mathrm{d}x =$$
$$\left(\sin(x) - \frac{1}{3}x^3 + \frac{\pi^2}{4}x\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi^3}{8} + \frac{\pi^3}{8} - \left(-1 + \frac{1}{3}\frac{\pi^3}{8} - \frac{\pi^3}{8}\right) = 2 + \frac{\pi^3}{6}$$

b) $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = \sin(x)$. Die Cosinus- und Sinuswerte sind gleich bei $45° = \frac{\pi}{4}$ oder $-135° = -\frac{3\pi}{4}$ (plus Vielfache von $360° = 2\pi$. Die gesuchte Fläche ist also:

$$\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos(x)-\sin(x))\,\mathrm{d}x =$$
$$(\sin(x)+\cos(x))\Big|_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}$$

c) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$. Die Schnittpunkte sind bei $x = 0$ und $x = 1$. Die gesuchte Fläche ist also:

$$\int_0^1 (g(x)-f(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - (0-0) = \frac{1}{3}$$