Aufgabe 21.26 Überprüfen Sie:

a) $\int x \cdot \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = (x-1)\cdot \mathrm{e}^x + C$

b) $\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - x + C$

c) $\int x \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2\ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4} + C$

d) $\int (\sin(x))^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(\cos(x))^3 - \cos(x) + C$

Aufgabe 21.27 Berechnen Sie die durch die Graphen folgender Funktionen eingeschlossene Fläche. Machen Sie erst eine Skizze.

a) $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = x^2 - \frac{\pi^2}{4}$

b) $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = \sin(x)$ (Flächenstück, das die y-Achse schneidet).

c) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$

Aufgabe 21.28 Eine Bahn beschleunigt aus dem Stillstand. Während den ersten 10 s nimmt die Beschleunigung linear von $0\,\mathrm{m/s^2}$ auf $2\,\mathrm{m/s^2}$ zu, während den nächsten 10 s nimmt die Beschleunigung wieder linear auf $0\,\mathrm{m/s^2}$ ab.

a) Skizzieren Sie die Beschleunigung als Funktion der Zeit $a(t)$.

b) Bestimmen Sie den Funktionsterm von $a(t)$.

c) Berechnen Sie die Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$ und skizzieren Sie diese.

d) Berechnen Sie die Positionsfunktion $s(t)$ und skizzieren Sie diese.

e) Wie schnell ist die Bahn nach 20 s und welche Strecke wurde dabei zurückgelegt?

Aufgabe 21.29 Rotiert man den Graphen von $f(x) = \sqrt{x}$ zwischen $x = 1$ und $x = 4$ um die x-Achse erhält man einen rotationssymmetrischen Blumentopf. Machen Sie eine Skizze. Berechnen Sie das Volumen des Blumentopfs. Machen Sie eine Plausibilitätsprüfung Ihres Resultats indem Sie das Volumen eines einfacheren, ähnlich grossen Körpers berechnen.

Aufgabe 21.30 Ein Pistenfahrzeug baut eine Schneeschanze in der Form eines Sinuskurvenstücks. Die Schanze beginnt mit horizontaler Tangente bei $x = 0$ [m] und endet bei $x = 20$ [m] mit ebenfalls horizontaler Tangente. Die Schanze erreicht an der höchsten Stelle eine Höhe von $h = 2$ [m]. Die Breite der Schanze beträgt 5 [m]. Berechnen Sie das Volumen der Schanze und schätzen Sie das Gewicht der Schanze ab.

Zusatzfrage*: Wie schnell muss man über die Schanze fahren, um abzuheben? *Berechnen Sie dazu die quadratische Funktion deren Graphen ein Massepunkt im freien Fall beschreibt, wenn er mit einer horizontalen Geschwindigkeit v der Schwerkraft überlassen wird. Man hebt ab, wenn die zweite Ableitung kleiner oder gleich der 2. Ableitung der Schanzenkurve im höchsten Punkt ist.*

Aufgabe 21.31 Die kinetische Energie (Bewegungsenergie) kann mit $E = \frac{1}{2}mv^2$ berechnet werden.

Wir nehmen an, ein Elektromotor liefert eine konstante Leistung (Energie pro Zeit). Wie nimmt damit die kinetische Energie in der Zeit zu? Welche Art von Funktion muss $E(t)$ sein?

Wenn vom Stillstand ($t = 0$) mit einer konstanten Leistung beschleunigt wird, welche Form hat die Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$?

Welche Form hat also die Beschleunigungsfunktion $a(t)$? Was bedeutet das für das Fahrgefühl zum Zeitpunkt $t = 0$?

Vergleichen Sie Ihr Resultat mit Aussagen aus Internet-Videos vom Beschleunigungsrekord eines bekannten Elektroautos.