

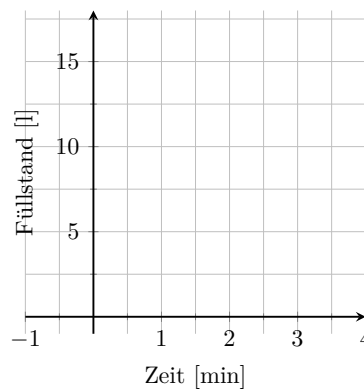
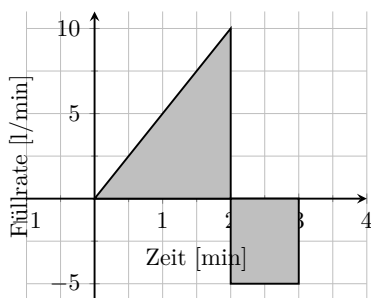
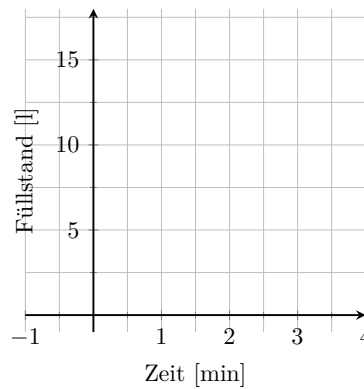
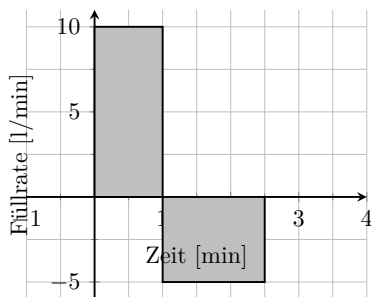
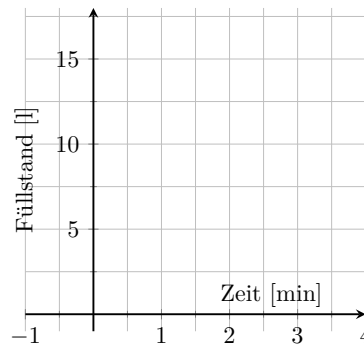
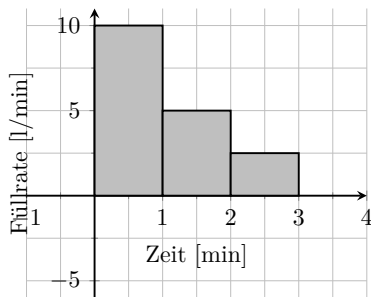
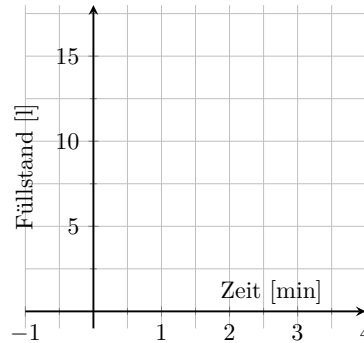
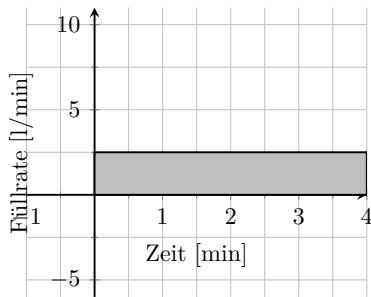


21 Integralrechnung

Die ersten beiden Aufgaben und einige weitere Teile dieses Dokuments basieren auf den Unterlagen von Simon Knaus, Mathematiklehrer an der Kantonsschule am Burggraben. Ihm sei herzlich gedankt.

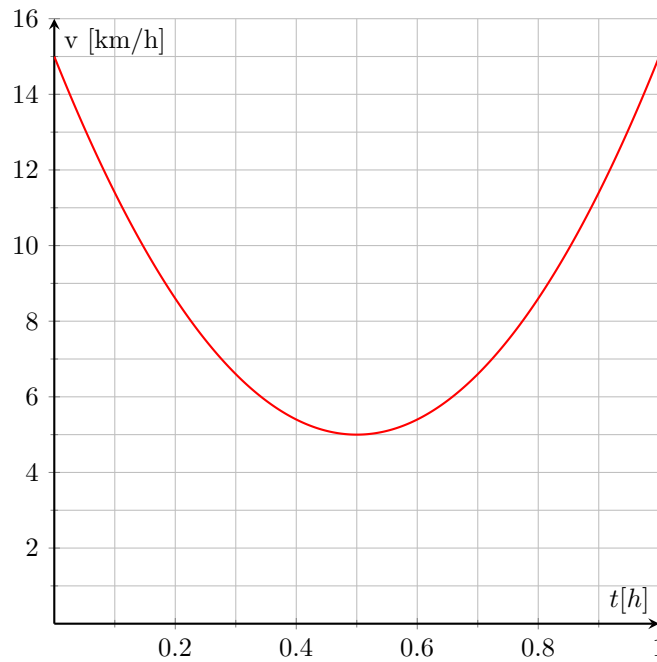
*** Aufgabe 21.1** Die Graphen links stellen die Zu- bzw. Abflussraten $r(t)$ für einen Wasserbehälter dar.

- Beschreiben Sie die Situation in Worten.
- Skizzieren Sie rechts den Füllstand des Behälters $V(t)$ und suchen Sie für beide Graphen einen Funktionsterm.





*** Aufgabe 21.2** Ein Raubüberfall in der Marktgasse. Ein Zeuge bezichtigt einen Fahrradfahrer des Raubes. Dieser ist ein Fitnessfreak und loggt immer live auf **Strava**. Zum Beweis seiner Unschuld legt er den Geschwindigkeitsgraphen der letzten Stunde vor. Dieser sieht wie folgt aus:



Der besagte Fahrradfahrer wurde nämlich eine Stunde nach dem Überfall 10 km entfernt von diesem angetroffen. Entlastet diese Geschwindigkeitskurve den Verdächtigen bereits?

1. Füllen Sie zu diesem Zweck die Tabelle unten aus:

| Zeit [h] | Untere Abschätzung | | Obere Abschätzung | |
|-----------|--------------------|--------|-------------------|--------|
| | v [km/h] | s [km] | v [km/h] | s [km] |
| 0.0 - 0.2 | | | | |
| 0.2 - 0.4 | | | | |
| 0.4 - 0.6 | | | | |
| 0.6 - 0.8 | | | | |
| 0.8 - 1.0 | | | | |
| Gesamtweg | | | | |

2. Wie könnte die Schätzung für den Gesamtweg verbessert werden? Skizzieren Sie wie Sie vorgehen könnten und wie die Tabelle aussehen müsste.

**Definition 21.0.1** Stetigkeit

Eine Funktion $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ ist **stetig**, wenn «der Graph der Funktion ohne Absetzen gezeichnet werden kann, d.h. wenn es keine Löcher oder Sprünge gibt».

Oder mathematisch präziser wenn gilt: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \forall x \in [a, b]$.

✂ **Aufgabe 21.3** Welche Funktionen aus Aufgabe [Aufgabe 21.1](#) sind stetig? An welchen Stellen (t -Werte) sind die unstetigen Funktionen unstetig?

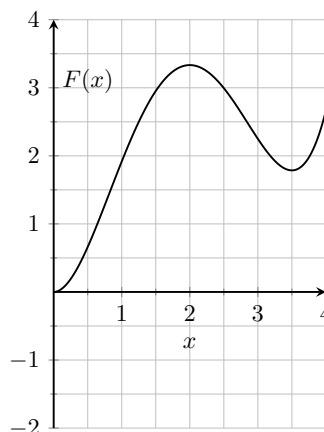
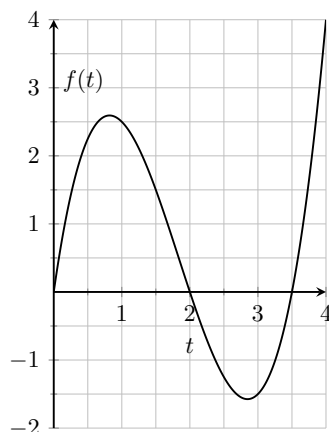
21.1 Fläche unter einem Funktionsgraphen

In den Aufgaben [Aufgabe 21.1](#) und [Aufgabe 21.2](#) haben wir effektiv Flächen unter einem Funktionsgraphen $f(t)$ bestimmt (bzw. angenähert). Wobei in der Aufgabe [Aufgabe 21.1](#) die Flächen unter der x -Achse mit negativen Zahlen angegeben werden. Es handelt sich also um **vorzeichenbehaftete Flächen**.

Die Fläche kann einerseits näherungsweise berechnet werden, indem man die Fläche von oben und unten abschätzt. Die Grenzwerte dieser Schätzungen ergeben dann die exakte Fläche.

Alternativ können wir die Eigenschaften der Funktion $F(x)$ untersuchen, die die Fläche unter der stetigen Funktion $f(t)$ zwischen $t = 0$ und $t = x$ angibt.

✂ **Aufgabe 21.4** Überzeugen Sie sich, dass $F(x)$ tatsächlich der vorzeichenbehafteten Fläche unter dem Graphen $f(t)$ zwischen $t = 0$ und $t = x$ entspricht. Untersuchen Sie die Graphen auch auf «diskussionswürdige» Stellen.

**Satz 21.1.1**

Wenn $F(x)$ der vorzeichenbehafteten Fläche des Graphen von $f(t)$ und der x -Achse zwischen den Werten $t = 0$ und $t = x$ entspricht, dann gilt:

$$F'(x) = f(x)$$

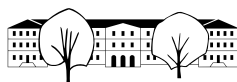
Intuitiv kann man einsehen, dass $F(x)$ proportional zum Wert von $f(x)$ wächst.

Beweis: Die Ableitung ist definiert als der Grenzwert des Differenzenquotienten:

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{Fläche unter } f(t) \text{ zwischen } t=x \text{ und } t=x+h}{h}.$$

Die Differenz $F(x+h) - F(x)$ entspricht der Fläche unter $f(t)$ zwischen $t = x$ und $t = x+h$.

Diese Fläche ist grösser als die Rechtecksfläche $f_{\min} \cdot h$ und kleiner als die Rechtecksfläche $f_{\max} \cdot h$, wobei f_{\min}



das Minimum von f im Intervall $[x, x+h]$ ist und f_{\max} das entsprechende Maximum. Es gilt also

$$\begin{aligned} &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq \\ &\leq F'(x) \leq \end{aligned}$$

Weil f stetig ist, gilt $\lim_{h \rightarrow 0} f_{\min} = \lim_{h \rightarrow 0} f_{\max} = f(x)$. Und damit ist

$$f(x) \leq F'(x) \leq f(x),$$

also $F'(x) = f(x)$, was zu beweisen war.

Definition 21.1.2 Stammfunktion

Eine Funktion $F(x)$ heisst Stammfunktion der Funktion $f(x)$, wenn $F'(x) = f(x)$.

✂ **Aufgabe 21.5** Bestimmen Sie **alle** möglichen Stammfunktionen von

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = e^x$

c) $f(x) = \sin(x)$.

✂ **Aufgabe 21.6** Seien $F(x)$ und $G(x)$ zwei unterschiedliche Stammfunktionen von $f(x)$. Zeigen Sie, dass sich $F(x)$ und $G(x)$ nur um eine Konstante unterscheiden. *Hinweis: Zeigen Sie, dass $F(x) - G(x)$ nicht von x abhängt, indem Sie ableiten.*

Definition 21.1.3 Unbestimmtes Integral

Die Menge aller Stammfunktionen einer Funktion f nennt man *unbestimmtes Integral* und schreibt dafür

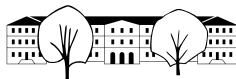
$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

und liest «Das Integral von $f(x) dx$ ». C ist eine beliebige reelle Zahl und $F(x)$ eine beliebige Stammfunktion von $f(x)$.

Die Notation \int steht für ein S , was für «Summe» steht. Es handelt sich um eine unendliche Summe unendlich kleiner Rechteckflächen der Höhe $f(x)$ und der «infinitesimalen» Breite dx .

Man vergleiche mit der Notation $f'(x) = \frac{df}{dx}$, die für eine unendlich kleine Differenz der Funktionswerte geteilt durch eine unendlich kleine Differenz der x -Werte steht.

In der «Nicht-Standard-Analysis» werden den reellen Zahlen sogenannte Infinitesimale hinzugefügt, die grösser als 0, aber kleiner als jede positive reelle Zahl sind. Diese Erweiterung mathematisch sauber zu definieren ist sehr anspruchsvoll und wurde erst vor 60 Jahren erstmals erreicht. Intuitiv wurde diese Sicht aber schon von Leibniz, einem der Pionieren der Differential- und Integralrechnung und «Erfinder» dieser Notation, verwendet. Für diverse physikalische und geometrische Probleme, die mit Integralen formuliert werden können, ist es hilfreich, das Integral als unendliche Summe unendlich kleiner Teile zu betrachten.

**Definition 21.1.4** Bestimmtes Integral

Für eine stetige Funktion f schreibt man für die Fläche zwischen $x = a$ und $x = b$ mit $b > a$ welche der Graph der Funktion mit der x -Achse einschliesst

$$\int_a^b f(x) dx$$

und nennt es das *bestimmte Integral* der Funktion f von a nach b .

Hinweis: Die Fläche ist vorzeichenbehaftet. Jene unter der x -Achse ist negativ.

Für die Berechnung des konkreten Wertes des bestimmten Integral nehmen wir an, wir hätten die spezielle Stammfunktion $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, die uns die Fläche zwischen $t = 0$ und $t = x$ berechnet. Es gilt:

$$\int_a^b f(t) dt = \int_0^b f(t) dt - \int_0^a f(t) dt = F(b) - F(a)$$

✳ **Aufgabe 21.7** Sei $G(x)$ eine andere Stammfunktion von $f(x)$. Zeigen Sie, dass $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$ und dass damit obige Formel für alle Stammfunktionen gültig ist.

Theorem 21.1.5 Hauptsatz der Analysis

Sei $f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Für alle $x_0 \in [a, b]$ ist

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

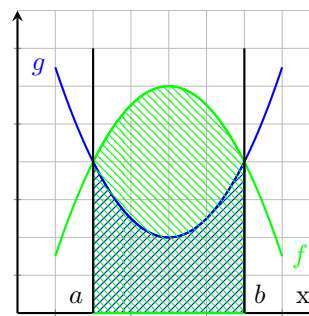
eine Stammfunktion von $f(x)$, d.h. $F'(x) = f(x)$.

Weiter gilt für alle Stammfunktionen $F(x)$ von $f(x)$ und alle $c, d \in [a, b]$

$$\int_c^d f(x) dx = F(d) - F(c).$$

Merke 21.1.6 Regeln für das bestimmte Integral

- $\int_a^a f(x) dx = 0$
- $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$
- $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$
- Wenn $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, dann ist die eingeschlossene Fläche zwischen f und g gleich $\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$.



✳ **Aufgabe 21.8** Begründen Sie obige Regeln mit kommentierten Skizzen.

**Merke 21.1.7** Notation für $F(b) - F(a)$

Der Ausdruck $F(b) - F(a)$ wird wie folgt abgekürzt:

$$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

✂ Aufgabe 21.9

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int_1^6 2x \, dx$

b) $\int_1^4 (4 - x) \, dx$

c) $\int_0^8 x^3 \, dx$

d) $\int_{-3}^3 x^2 \, dx$

e) $\int_0^2 e^x \, dx$

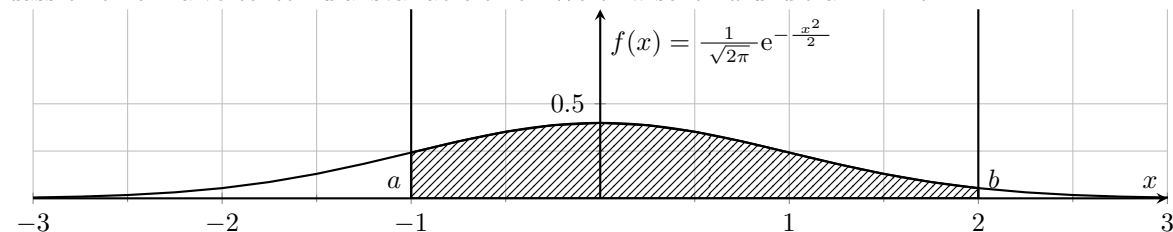
f) $\int_0^3 4 \, dx$

g) $\int_0^{-\frac{\pi}{2}} \sin(x) \, dx$

h) $\int_1^6 2 - \sin(x) \, dx$

i) $\int_{-3}^3 \sin(x) \, dx$

Wir können sämtliche Funktionen ableiten, die als Funktionsterm gegeben sind. Das Integrieren ist bedeutend schwieriger und es gibt keinen (einfachen) Satz von Regeln, um eine Stammfunktion zu finden. Es gibt auch Funktionen, deren Stammfunktionen nicht als Funktionsterm mit den gebräuchlichen Funktionen und Rechenoperationen geschrieben werden können. Das prominenteste Beispiel ist wohl $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, die «Glockenkurve», die «Dichtefunktion» der «Normalverteilung». Das Integral $\int_a^b f(x) \, dx$ ergibt die Wahrscheinlichkeit, dass eine normalverteilte Zufallsvariable einen Wert zwischen a und b annimmt.



Es gilt $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx =$

Merke 21.1.8 Integrale mit dem TR

«Menu 4 3»

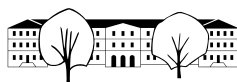
Es können sowohl bestimmte wie auch unbestimmte Integrale berechnet werden, je nachdem ob man die Grenzen einträgt oder nicht.

21.2 Physikalische Anwendungen

✂ Aufgabe 21.10 In dieser Aufgabe wollen wir die Physik-Formeln für die gleichmässig beschleunigte Bewegung herleiten. Wir haben die Funktionen $s(t)$ (Position), $v(t)$ (Geschwindigkeit) und $a(t) = a$ die konstante Beschleunigung. Es gilt $a(t) = v'(t)$ und $v(t) = s'(t)$. Bestimmen Sie damit $v(t)$ und $s(t)$ und beschreiben Sie die physikalische Bedeutung der Integrationskonstanten.

✂ Aufgabe 21.11 Beschleunigung von Motorfahrzeugen:

1. Ein Sportwagen beschleunigt in 3 s gleichmässig von $v = 0$ [m/s] auf $v = 24$ [m/s]. Welche Wegstrecke legt er währenddessen zurück?
2. Vergleichen Sie diese Daten mit einem aktuellen Elektrosportwagen, z.B. einem [Tesla](#).



3. Erstellen Sie eine Tabelle, in der Sie die Strecke berechnen, welche drei Fahrzeuge Ihrer Wahl benötigen, um auf 100 km/h zu beschleunigen.

✱ **Aufgabe 21.12** Ein Massepunkt mit der Masse m ist an einer idealen, linearen Feder befestigt, d.h. einer Feder mit Federkonstante k , deren Kraft F proportional zur Auslenkung s ist, d.h. $F(s) = -k \cdot s$. Warum das negative Vorzeichen?

Ziel ist es, eine Funktion $s(t)$ zu bestimmen, die die Position des Punktes zu jedem Zeitpunkt beschreibt.

Für die Beschleunigung des Punktes gilt: $F(t) = m \cdot a(t)$, wobei $F(t) = -k \cdot s(t)$. Weiter gilt $a(t) = s''(t)$. Wir suchen also eine Funktion für die gilt:

$$-k \cdot s(t) = m \cdot s''(t).$$

- Finden Sie eine Funktion, für die $s''(t) = -s(t)$ gilt.
- Finden Sie eine Funktion, für die $s''(t) = -c^2 \cdot s(t)$ gilt, mit $c \in \mathbb{R}^+$. Welche physikalische Interpretation hat c ?
- Finden Sie eine Funktion, für die gilt $-k \cdot s(t) = m \cdot s''(t)$. Interpretieren Sie den Einfluss der Grössen k und m auf die Lösung.

✱ **Aufgabe 21.13** Man startet eine Bakterien-Kultur in einer Nährschale. Sei $N(t)$ die Anzahl Bakterien zu jedem Zeitpunkt t . Am Anfang kann davon ausgegangen werden, dass die Wachstumsrate proportional zur Anzahl Bakterien ist. Die Proportionalitätskonstante sei c und ist gegeben, z.B. durch die Art der Bakterien und Umgebungsbedingungen. Es gilt die Gleichung

$$N'(t) = c \cdot N(t) \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}^+.$$

- Finden Sie (wenn möglich alle) Funktionen $N(t)$ für die $N'(t) = N(t)$ gilt.
- Finden Sie (wenn möglich alle) Funktionen $N(t)$ für die $N'(t) = c \cdot N(t)$ gilt.
- Was muss z.B. noch gegeben sein, um die Funktion $N(t)$ vollständig zu bestimmen?

✱ **Aufgabe 21.14** Eine Tasse Tee kühlt bei 0°C Umgebungstemperatur ab. Sei $T(t)$ die Temperatur des Tees zu jedem Zeitpunkt t . Die Abkühlrate ist proportional zu $T(t)$. Je heisser der Tee, desto grösser ist die momentane Abkühlrate. Sei c die entsprechende Proportionalitätskonstante. Stellen Sie die Differentialgleichung auf (d.h. eine Gleichung die $T(t)$ und $T'(t)$ enthält), und finden Sie Lösungen.

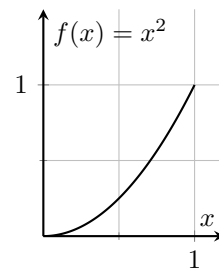
21.3 Längen, Flächen und Volumina

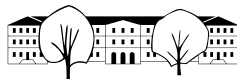
✱ **Aufgabe 21.15** Berechnen Sie die Einheitskreisfläche als bestimmtes Integral.

- Bestimmen Sie den Funktionsterm einer Funktion $f(x)$ so, dass deren Graphen dem Viertelkreisbogen im ersten Quadranten entspricht.
- Bestimmen Sie Fläche unter $f(x)$ und dann damit die Einheitskreisfläche.

✱ **Aufgabe 21.16** Wie lange ist der Parabelbogen der Funktion $f(x) = x^2$ von $x = 0$ bis $x = 1$?

Die Bogenlänge ergibt sich als unendliche Summe aus unendlich kleinen Bogenstückchen. Beispielhaft betrachten wir ein Stückchen bei einem bestimmten x -Wert (zur Veranschaulichung $x = 0.5$). Das dx zeichnen wir als Kathete im Stützdreieck in Übergrösse 0.5, das Bogenstückchen wird zu einem Abschnitt auf der Tangente. Berechnen Sie die Länge dieses Tangentenabschnitts. Formen Sie dann so um, dass dx ein Faktor ist und integrieren Sie dann diesen Ausdruck.



**Merke 21.3.1** Bogenlänge eines Funktionsgraphen

Die Bogenlänge L einer (stetig differenzierbaren) Funktion $f(x)$ zwischen $x = a$ und $x = b$ beträgt

$$L = \int_a^b \sqrt{(f'(x))^2 + 1} \, dx.$$

✂ **Aufgabe 21.17** Ziel ist es, das Volumen der Einheitskugel zu berechnen. Dazu zerschneiden wir die Kugel in unendlich viele, unendlich flache Zylinder (d.h. Zylinder der Höhe dx) und addieren deren Volumen.

Die Zylinderachsen entsprechen der x -Achse. Wir betrachten wieder die Funktion $f(x)$, deren Graph der oberen Hälfte des Einheitskreises entspricht.

An einer Stelle x (z.B. $x = 0.5$ zur Veranschaulichung) zeichnen wir einen Zylinder mit Radius $f(x)$ und «Höhe» dx ein.

Bestimmen Sie das Volumen einer solchen «Scheibe» und integrieren Sie dann von Hand, um das Volumen der Einheitskugel zu bestimmen.

Leiten Sie daraus das Volumen einer Kugel mit Radius r her.

Merke 21.3.2 Volumen eines Rotationskörpers

Das Volumen des Rotationskörpers, den man erhält, wenn man den Graphen einer (stetigen) Funktion $f(x)$ zwischen $x = a$ und $x = b$ um die x -Achse rotiert, beträgt

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2 \, dx.$$

✂ **Aufgabe 21.18** Berechnen Sie das Volumen eines geraden Kreiskegels als Volumen eines Rotationskörpers.

✂ **Aufgabe 21.19** Ziel ist es, die Oberfläche der Einheitskugel zu bestimmen.

Dazu zerschneiden wir die Kugeloberfläche wieder mit Ebenen senkrecht zur x -Achse. Die entstehenden schiefen Ringe betrachten wir näherungsweise als Rechtecke mit der Länge gleich dem Ringumfang und mit der Breite gleich der angenäherten Ringbreite (Bogenlänge des Funktionsgraphen). Diese Rechtecksflächen werden aufsummiert, um die Kugeloberfläche zu erhalten.

Die schiefen Ringe könnten auch als Mantelflächen von Kegelstümpfen aufgefasst werden. Der Unterschied zur oben vorgeschlagenen Rechtecksfläche ist allerdings von der Ordnung $(dx)^2$ und kann daher vernachlässigt werden.

Merke 21.3.3 Oberfläche eines Rotationskörpers

Die Oberfläche eines Rotationskörpers, den man erhält, wenn man den Graphen einer (stetig differenzierbaren) Funktion $f(x)$ zwischen $x = a$ und $x = b$ um die x -Achse rotiert, beträgt

$$O = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx.$$

✂ **Aufgabe 21.20** Ein Torus (wie z.B. ein Veloschlauch) wird durch zwei Größen charakterisiert: R und r , wobei R der Entfernung von Schlauchmittelpunkt zum Radmittelpunkt entspricht und r dem halben Schlauchdurchmesser.

Berechnen Sie Volumen und Oberfläche eines Torus.

21.4 Standard-Aufgaben



✂ **Aufgabe 21.21** Berechnen Sie vollständig von Hand die eingeschlossene Fläche zwischen den Graphen folgender Funktionen:

- a) $f(x) = -2x^2 - 3x + 2$ und $g(x) = -5x^2 + 3x + 26$ b) $f(x) = -2x^2 - x + 1$ und $g(x) = -4x^2 + 3x + 31$
 c) $f(x) = -x^2 - x + 1$ und $g(x) = -4x^2 + 2x + 19$ d) $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$ und $g(x) = -x^2 - 5x + 7$

✂ **Aufgabe 21.22** Mit Hilfe des TR, skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen für Werte zwischen 0 und 2:

$$f(x) = \sqrt{1 - (1-x)^2}, \quad g(x) = -3\sqrt{1 - \sqrt{\frac{x}{2}}}.$$

Spiegelt man die beiden Graphen an der y -Achse, erhält man eine geschlossene Figur. Berechnen Sie die Fläche dieser Figur.

✂ **Aufgabe 21.23** Ziel ist es, eine «schöne» Vase zu entwerfen. Diese soll als Rotationskörper eines Funktionsgraphen einer Funktion $f(x)$ konzipiert werden. Der Graph soll durch die Punkte $(0, 1)$ und $(6, 2)$ gehen. Die Steigungen der Tangenten in diesen Punkten sollen beide 1 sein. Damit haben wir vier Bedingungen, nämlich $f(0) = 1$, $f(6) = 2$, $f'(0) = 1$ und $f'(6) = 1$.

Als Ansatz sei $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ eine kubische Funktion. Bestimmen Sie die vier Koeffizienten mit Hilfe obiger Bedingungen.

Skizzieren Sie die Funktion und berechnen Sie dann die Oberfläche und das Volumen der so entstehenden Vase. Überprüfen Sie Ihre Resultate, indem Sie mit einem ähnlich grossen Zylinder vergleichen.

21.5 Integrationsregeln

Einige Ableitungsregeln haben eine Entsprechung als Intergrationsregel. Diese Regeln sind sowohl für das unbestimmte Integral (Resultat ist eine Stammfunktion) wie für das bestimmte Integral (Resultat ist eine Zahl) gültig.

Merke 21.5.1 Integrationsregeln

Ableitungsregel

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Integrationsregel

$$\int c \cdot f(x) \, dx = c \cdot \int f(x) \, dx$$

$$\int (f(x) + g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$$

Aus der Produktregel $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ könnte die Regel zur «partiellen Integration» hergeleitet werden.

21.6 Repetitionsaufgaben

✂ **Aufgabe 21.24** Finden Sie folgende Stammfunktionen:

a) $\int x \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) dx$

b) $\int (2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)) dx$

c) $\int \sqrt{x} \, dx$

d) $\int (1+x)^2 dx$

✂ **Aufgabe 21.25** Berechnen Sie von Hand:

a) $\int_{-2}^3 \left(-\frac{1}{3}x^2 + 3x - \frac{1}{2} \right) dx$

b) $\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} \sin(x) - \frac{1}{3} \cos(x) \right) dx$

c) $\int_{-\ln(3)}^{\ln(5)} \sqrt{2} \cdot e^x \, dx$

d) $\int_1^{e^4} \frac{4}{x} \, dx$

e) $\int_1^4 \frac{2}{x^2} \, dx$

f) $\int_0^1 \cos(x^2) \cdot 2x \, dx$



✂ **Aufgabe 21.26** Überprüfen Sie:

$$a) \int x \cdot e^x dx = (x - 1) \cdot e^x + C$$

$$b) \int \ln(x) dx = x \ln(x) - x + C$$

$$c) \int x \cdot \ln(x) dx = \frac{x^2 \ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

$$d) \int (\sin(x))^3 dx = \frac{1}{3}(\cos(x))^3 - \cos(x) + C$$

✂ **Aufgabe 21.27** Berechnen Sie die durch die Graphen folgender Funktionen eingeschlossene Fläche. Machen Sie erst eine Skizze.

$$a) f(x) = \cos(x), g(x) = x^2 - \frac{\pi^2}{4}$$

$$b) f(x) = \cos(x), g(x) = \sin(x) \text{ (Flächenstück, das die } y\text{-Achse schneidet).}$$

$$c) f(x) = x^2, g(x) = \sqrt{x}$$

✂ **Aufgabe 21.28** Eine Bahn beschleunigt aus dem Stillstand. Während den ersten 10s nimmt die Beschleunigung linear von 0 m/s^2 auf 2 m/s^2 zu, während den nächsten 10s nimmt die Beschleunigung wieder linear auf 0 m/s^2 ab.

- Skizzieren Sie die Beschleunigung als Funktion der Zeit $a(t)$.
- Bestimmen Sie den Funktionsterm von $a(t)$.
- Berechnen Sie die Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$ und skizzieren Sie diese.
- Berechnen Sie die Positionsfunktion $s(t)$ und skizzieren Sie diese.
- Wie schnell ist die Bahn nach 20s und welche Strecke wurde dabei zurückgelegt?

✂ **Aufgabe 21.29** Rotiert man den Graphen von $f(x) = \sqrt{x}$ zwischen $x = 1$ und $x = 4$ um die x -Achse erhält man einen rotationssymmetrischen Blumentopf. Machen Sie eine Skizze. Berechnen Sie das Volumen des Blumentopfs. Machen Sie eine Plausibilitätsprüfung Ihres Resultats indem Sie das Volumen eines einfacheren, ähnlich grossen Körpers berechnen.

✂ **Aufgabe 21.30** Ein Pistenfahrzeug baut eine Schneeschanze in der Form eines Sinuskurvenstücks. Die Schanze beginnt mit horizontaler Tangente bei $x = 0$ [m] und endet bei $x = 20$ [m] mit ebenfalls horizontaler Tangente. Die Schanze erreicht an der höchsten Stelle eine Höhe von $h = 2$ [m]. Die Breite der Schanze beträgt 5 [m]. Berechnen Sie das Volumen der Schanze und schätzen Sie das Gewicht der Schanze ab.

Zusatzfrage*: Wie schnell muss man über die Schanze fahren, um abzuheben? Berechnen Sie dazu die quadratische Funktion deren Graphen ein Massepunkt im freien Fall beschreibt, wenn er mit einer horizontalen Geschwindigkeit v der Schwerkraft überlassen wird. Man hebt ab, wenn die zweite Ableitung kleiner oder gleich der 2. Ableitung der Schanzenkurve im höchsten Punkt ist.

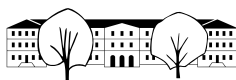
✂ **Aufgabe 21.31** Die kinetische Energie (Bewegungsenergie) kann mit $E = \frac{1}{2}mv^2$ berechnet werden.

Wir nehmen an, ein Elektromotor liefert eine konstante Leistung (Energie pro Zeit). Wie nimmt damit die kinetische Energie in der Zeit zu? Welche Art von Funktion muss $E(t)$ sein?

Wenn vom Stillstand ($t = 0$) mit einer konstanten Leistung beschleunigt wird, welche Form hat die Geschwindigkeitsfunktion $v(t)$?

Welche Form hat also die Beschleunigungsfunktion $a(t)$? Was bedeutet das für das Fahrgefühl zum Zeitpunkt $t = 0$?

Vergleichen Sie Ihr Resultat mit Aussagen aus Internet-Videos vom Beschleunigungsrekord eines bekannten Elektroautos.

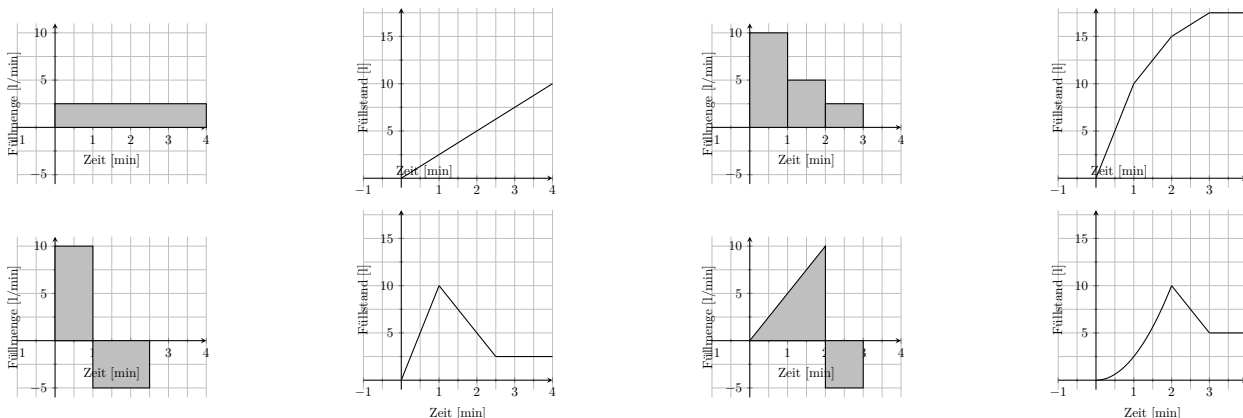


21.7 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

- ✂ Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".
- ✳ Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**
- ✂ Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

✳ Lösung zu Aufgabe 21.1 ex-intro-badewanne



b) Fall 1: $r(t) = 2.5$, $V(t) = 2.5t$.

$$\text{Fall 2: } r(t) = \begin{cases} 10 & \text{wenn } 0 \leq t < 1 \\ 5 & \text{wenn } 1 \leq t < 2 \\ 2.5 & \text{wenn } 2 \leq t < 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, V(t) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } t < 0 \\ 10t & \text{wenn } 0 \leq t < 1 \\ 10 + 5(t - 1) & \text{wenn } 1 \leq t < 2 \\ 15 + 2.5(t - 2) & \text{wenn } 2 \leq t < 3 \\ 17.5 & \text{wenn } t \geq 3 \end{cases}$$

$$\text{Fall 3: } r(t) = \begin{cases} 10 & \text{wenn } 0 \leq t < 1 \\ -5 & \text{wenn } 1 \leq t < 2.5 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, V(t) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } t < 0 \\ 10t & \text{wenn } 0 \leq t < 1 \\ 10 - 5(t - 1) & \text{wenn } 1 \leq t < 2.5 \\ 2.5 & \text{wenn } t \geq 2.5 \end{cases}$$

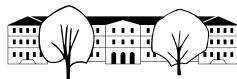
$$\text{Fall 4: } r(t) = \begin{cases} 5t & \text{wenn } 0 \leq t < 2 \\ -5 & \text{wenn } 2 \leq t < 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, V(t) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } t < 0 \\ 2.5t^2 & \text{wenn } 0 \leq t < 2 \\ 10 - 5(t - 2) & \text{wenn } 2 \leq t < 3 \\ 5 & \text{wenn } t \geq 2.5 \end{cases}$$

✳ Lösung zu Aufgabe 21.2 ex-fahrrad-us-os-exercise

Die Funktion die verwendet wurde ist $f(x) = 40(x - 0.5)^2 + 5$. Daraus oder durch Ablesen ergeben sich die folgenden Werte

| Zeit [h] | Untere Abschätzung | | Obere Abschätzung | |
|-----------|--------------------|--------|-------------------|--------|
| | v [km/h] | s [km] | v [km/h] | s [km] |
| 0.0 - 0.2 | 8.6 | 1.72 | 15 | 3 |
| 0.2 - 0.4 | 5.4 | 1.08 | 8.6 | 1.72 |
| 0.4 - 0.6 | 5 | 1 | 5.4 | 1.08 |
| 0.6 - 0.8 | 5.4 | 1.08 | 8.6 | 1.72 |
| 0.8 - 1.0 | 8.6 | 1.72 | 15 | 3 |
| Gesamtweg | | 6.6 | | 10.52 |

Die Abschätzung könnte verfeinert werden, indem die Zeitintervalle verkürzt werden. Dies hätte eine längere Tabelle zur Folge, dafür aber eine genauere Abschätzung.



Das heisst, der Verdächtige kann noch nicht entlastet werden: Diese Tabelle besagt einzig, dass er mindestens 6.6 km und maximal 10.5 km gefahren ist. Seine Position, die 10 km vom Tatort entfernt ist, liegt also in «Reichweite der Abschätzung».

✂ **Lösung zu Aufgabe 21.3** ex-stetige-funktionen-badewanne

Die Funktionen rechts sind immer stetig.

Von den Funktionen links ist nur die erste auf dem Intervall $[0, 4]$ stetig (für $t = 0$ könnte die Funktionen ebenfalls unstetig sein, wenn $r(t) = 0$ für $t < 0$).

Die anderen linken Funktionen haben Unstetigkeiten. Die zweite bei $t = 0, 1, 2, 3$, die dritte bei $t = 0, 1, 2.5$ und die vierte bei $t = 0, 2, 3$. Betrachtet man die Funktionen nur auf dem Intervall $[0, 3]$, könnte $t = 0$ und $t = 3$ als unstetige Stelle weggelassen werden.

✂ **Lösung zu Aufgabe 21.4** ex-flaeche-ist-aufleiten-einsehen

✂ **Lösung zu Aufgabe 21.9** ex-bestimmte-integrale-drill

$$\text{a) } \int_1^6 2x \, dx = x^2 \Big|_1^6 = 6^2 - 1^2 = 35$$

$$\text{b) } \int_1^4 (4 - x) \, dx = \left(4x - \frac{1}{2}x^2\right) \Big|_1^4 = (16 - 8) - \left(4 - \frac{1}{2}\right) = 8 - \frac{7}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\text{c) } \int_0^8 x^3 \, dx = \frac{1}{4}x^4 \Big|_0^8 = \frac{1}{4}8^4 = 2^{10} = 1024$$

$$\text{d) } \int_{-3}^3 x^2 \, dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_{-3}^3 = \frac{1}{3} \cdot (27) - \frac{1}{3} \cdot (-27) = 18$$

$$\text{e) } \int_0^2 e^x \, dx = e^x \Big|_0^2 = e^2 - e^0 = e^2 - 1$$

$$\text{f) } \int_0^3 4 \, dx = 4x \Big|_0^3 = 12 - 0 = 12$$

$$\text{g) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \, dx = -\cos(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - (-1) = 1$$

$$\text{h) } \int_1^6 2 - \sin(x) \, dx = (2x + \cos(x)) \Big|_1^6 = (12 + \cos(6)) - (2 + \cos(1)) = 10 + \cos(6) - \cos(1)$$

$$\text{i) } \int_{-3}^3 \sin(x) \, dx = -\cos(x) \Big|_{-3}^3 = \cos(3) - \cos(-3) = \cos(3) - \cos(3) = 0$$

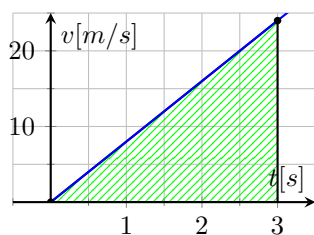
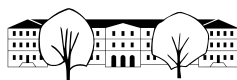
✂ **Lösung zu Aufgabe 21.10** ex-gleichmaessig-beschleunigt-formeln-herleiten

$v(t)$ ist eine Stammfunktion von $a(t) = a$, also $v(t) = at + C$, wobei das C der Anfangsgeschwindigkeit v_0 entspricht. Wir notieren also $v(t) = at + v_0$.

$s(t)$ ist eine Stammfunktion von $v(t) = at + v_0$, also $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + C$, wobei das C der Anfangsposition s_0 entspricht. Wir notieren also $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$.

✂ **Lösung zu Aufgabe 21.11** ex-acceleration-distance

1. Wenn $v(t)$ gleichmässig von $v(0) = 0$ [m/s] auf $v(3) = 0$ [m/s] zunimmt, müssen wir die lineare Funktion suchen, welche durch die Punkte $(0, 0)$ und $(3, 25)$ geht. Es ist also $v(t) = \frac{24}{3}t + 0 = 8t$.



Analog zum Eingangsbeispiel mit dem Fahrradfahrer ist auch hier die Fläche unter der Geschwindigkeitskurve die zurückgelegte Distanz:

Es ist also $s(3) = \int_0^3 8t \, dt = 36[m]$. Damit legt der Sportwagen eine Strecke von 36 m zurück

* Lösung zu Aufgabe 21.12 ex-federpendel

Die Kraft zieht in der entgegengesetzten Richtung wie die Auslenkung.

- $s(t) = \sin(t)$ oder $s(t) = \cos(t)$ und Vielfache und Summen davon erfüllen die Bedingung.
- $s(t) = \sin(ct)$ oder $s(t) = \cos(ct)$ und Vielfache und Summen davon erfüllen die Bedingung. Die Konstante c ist proportional zur Frequenz, welche gleich $2\pi \cdot c$ ist.
- Die Gleichung kann wie folgt geschrieben werden:

$$s''(t) = -\frac{k}{m} \cdot s(t)$$

Also erfüllt z.B. $s(t) = \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)$ die Bedingung. Die Frequenz steigt mit der Federkonstante (je härter die Feder, desto höher die Frequenz) und fällt mit der Masse (je grösser die Masse, desto langsamer die Schwingung).

* Lösung zu Aufgabe 21.13 ex-exponentielles-wachstum

- Z.B. $N(t) = e^t$ ist so eine Funktion. Aber auch alle Vielfachen davon, z.B. $N(t) = N_0 \cdot e^t$ mit $N_0 \in \mathbb{R}$.
- Z.B. $N(t) = e^{ct}$ ist so eine Funktion. Aber auch alle Vielfachen davon, z.B. $N(t) = N_0 \cdot e^{ct}$ mit $N_0 \in \mathbb{R}$.
- Die Wachstumsrate c muss gegeben sein, und die Anzahl Bakterien N_0 zur Zeit $t = 0t$.

* Lösung zu Aufgabe 21.14 ex-abkuehlen

Abkühlrate ist das c -fache der Temperatur $T(t)$, mit $c \in \mathbb{R}^+$:

$$T'(t) = -cT(t)$$

Eigentlich wäre es sinnvoller, die Abkühlrate mit einem negativen Vorzeichen zu versehen, die Gleichung ist so aber sprechender.

Betrachtet man erst $T'(t) = -T(t)$ findet man z.B. $T(t) = e^{-t}$ als Lösung.

Eine Lösung ist $T(t) = e^{-ct}$, die allgemeine Lösung ist $T(t) = T_0 \cdot e^{-ct}$, wobei $T_0 \in \mathbb{R}$ als Anfangstemperatur interpretiert werden kann.

* Lösung zu Aufgabe 21.15 ex-kreisflaeche

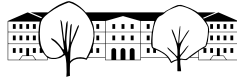
- $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ (via Satz von Pythagoras).
- $A = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{\pi}{4}$ (via TR). Also ist die Einheitskreisfläche π .

* Lösung zu Aufgabe 21.16 ex-parabel-bogenlaenge

Die eine horizontale Kathete ist dx , die vertikale Kathete ist $f'(x) \cdot dx$. Damit hat das Tangentenstück die Länge $\sqrt{(f'(x) \cdot dx)^2 + (dx)^2} = \sqrt{(f'(x))^2 + 1} \cdot dx$.

Die Länge ist also

$$\int_0^1 \sqrt{(f'(x))^2 + 1} \, dx = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{1}{2}x\right)^2 + 1} \, dx = \frac{4 \ln(\sqrt{5} + 1) - 4 \ln(2) + \sqrt{5}}{4} \approx 1.04023 \quad \text{mit TR}$$



✳ **Lösung zu Aufgabe 21.17** ex-kugelvolumen

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$V_{\text{Zylinder}} = \pi(f(x))^2 dx.$$

$$V_{\text{Einheitskugel}} = \int_{-1}^1 \pi (\sqrt{1-x^2})^2 dx = \int_{-1}^1 \pi(1-x^2) dx = \pi \left(x - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_{-1}^1 = \pi \left(1 - \frac{1}{3} - (-1 + \frac{1}{3}) \right) = \frac{4\pi}{3}$$

Streckt man die Einheitskugel mit dem Streckungsfaktor r , erhält man eine Kugel mit Radius r . Das Volumen wird dabei mit r^3 multipliziert. Es gilt also:

$$V_{\text{Kugel}} = \frac{4\pi}{3} \cdot r^3$$

✳ **Lösung zu Aufgabe 21.18** ex-kegelvolumen

Erst müssen die gegebenen Grössen festgelegt werden. Typischerweise werden Kreiskegel durch ihre Höhe h und den Kreisradius r der Basis gegeben.

Einen solchen Kegel erhalten wir, wenn wir den Graphen einer linearen Funktion $f(x)$ um die x -Achse rotieren. Am einfachsten wählt man $f(0) = 0$ (Kegelspitze) und $f(h) = r$ (Basismittelpunkt). Also

$$f(x) = \frac{r}{h}x$$

Damit ist das gesuchte Volumen

$$V = \int_0^h \pi(f(x))^2 dx = \int_0^h \pi \left(\frac{r}{h}x \right)^2 dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^h = \pi \frac{r^2}{3h^2} \cdot h^3 - 0 = \frac{\pi}{3}r^2 \cdot h$$

✳ **Lösung zu Aufgabe 21.19** ex-kugeloberflaeche

Wir betrachten die Kugel als Rotationskörper des Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ nach Rotation um die x -Achse.

Der Umfang eines Ringes an der Stelle x ist $2\pi f(x)$. Die infinitesimale Bogenlänge beträgt $\sqrt{1+(f'(x))^2} dx$. Und damit beträgt die Rechtecksfläche $2\pi f(x) \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} dx$. Die Oberfläche ist also

$$\begin{aligned} O_{\text{Kugel}} &= \int_{-1}^1 2\pi f(x) \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} dx = \int_{-1}^1 2\pi \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x)\right)^2} dx = \\ &= 2\pi \cdot \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} dx = 2\pi \cdot \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}} dx = \\ &= 2\pi \cdot \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}} dx = 2\pi \cdot \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{1-x^2}} dx = \\ &= 2\pi \cdot \int_{-1}^1 1 dx = 2\pi \cdot \left(x \Big|_{-1}^1 \right) = 2\pi \cdot 2 = 4\pi \end{aligned}$$

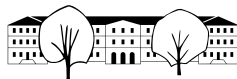
✳ **Lösung zu Aufgabe 21.20** ex-torus

Ein Torus mit Radien R und r erhält man, wenn man den Kreis mit Radius r und Zentrum $(0, R)$ um die x -Achse rotiert.

Dazu betrachten wir den oberen Kreisbogen als Graphen einer Funktion $f(x)$ und den unteren Kreisbogen als Graphen einer Funktion $g(x)$:

$$f(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{und} \quad g(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2}$$

Das Volumen kann nun als Differenz der Volumina der Rotationskörper der Graphen von $f(x)$ und $g(x)$ berechnet werden. Anstatt die ganzen Umformungen im Integral vorzunehmen, könnten im TR auch einfach die Funktionen



$f(x)$ und $g(x)$ definiert werden und dann damit die Integrale berechnet werden.

$$\begin{aligned} O &= \pi \int_{-r}^r (f(x))^2 dx - \pi \int_{-r}^r (g(x))^2 dx = \pi \int_{-r}^r ((f(x))^2 - (g(x))^2) dx = \\ &= \pi \int_{-r}^r \left(R^2 + 2R\sqrt{r^2 - x^2} + (r^2 - x^2) - (R^2 - 2R\sqrt{r^2 - x^2} + (r^2 - x^2)) \right) dx = \pi \int_{-r}^r 4R\sqrt{r^2 - x^2} dx = \\ &= 4R\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx \stackrel{\text{TR}}{=} 4R\pi \cdot \frac{\pi r^2}{2} = 2\pi R \cdot \pi r^2 \end{aligned}$$

Beachten Sie die Schönheit der Formel: Umfang des Kreises durch die Schlauchmitte mal Querschnittsfläche des Schlauches. Ein Torus hat also das gleiche Volumen wie das eines Zylinders mit gleicher Grundfläche und Höhe gleich dem Umfang des Kreises durch die Schlauchmitte.

Die Oberfläche ist die Summe der Oberflächen der Rotationskörper der Graphen von $f(x)$ und $g(x)$.

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_{-r}^r f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} dx + 2\pi \int_{-r}^r g(x)\sqrt{1 + (g'(x))^2} dx = \\ &= 2\pi \int_{-r}^r \left(f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} + g(x)\sqrt{1 + (g'(x))^2} \right) dx = \\ &= 2\pi \int_{-r}^r \left((R + \sqrt{r^2 - x^2}) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot (-2x) \right)^2} + (R - \sqrt{r^2 - x^2}) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{-2\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot (-2x) \right)^2} \right) dx = \\ &= 2\pi \int_{-r}^r \left((R + \sqrt{r^2 - x^2}) \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} + (R - \sqrt{r^2 - x^2}) \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} \right) dx = \\ &= 2\pi \int_{-r}^r \left((R + \sqrt{r^2 - x^2}) \cdot \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} + (R - \sqrt{r^2 - x^2}) \cdot \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} \right) dx = \\ &= 2\pi \int_{-r}^r \left((R + \sqrt{r^2 - x^2}) \cdot r \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} + (R - \sqrt{r^2 - x^2}) \cdot r \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right) dx = \\ &= 2\pi \int_{-r}^r r \left(\frac{R}{\sqrt{r^2 - x^2}} + 1 + \frac{R}{\sqrt{r^2 - x^2}} - 1 \right) dx = \\ &= 4\pi r \int_{-r}^r \frac{R}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = 4\pi r R \int_{-r}^r \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx \stackrel{\text{TR}}{=} 4\pi r R \cdot \pi = (2\pi R) \cdot (2\pi r) \end{aligned}$$

Beachten Sie die Schönheit der Formel: Umfang des Kreises durch die Schlauchmitte mal Querschnittsfläche des Schlauches. Oder das gleiche Volumen wie das eines Zylinders mit gleicher Grundfläche und Höhe gleich dem Umfang des Kreises durch die Schlauchmitte. Ein Torus hat also die gleiche Oberfläche wie die Mantelfläche eines Zylinders mit gleicher Grundfläche und Höhe gleich dem Umfang des Kreises durch die Schlauchmitte.

✂ Lösung zu Aufgabe 21.21 ex-flaeche-zwischen-parabeln

a) Erst werden die Schnittpunkte der Graphen mit folgender Gleichung bestimmt: $f(x) = g(x)$, bzw. $g(x) - f(x) = 0$.

$$g(x) - f(x) = -2x^2 - 3x + 2 - (-5x^2 + 3x + 26) = -3x^2 + 6x + 24 = 0$$

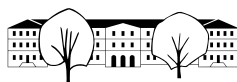
$-3 \cdot (x^2 - 2x - 8) = 0$, also $-3 \cdot (x + 2)(x - 4) = 0$, also $x = -2$ oder $x = 4$. (Man sucht zwei Zahlen mit Produkt -8 und Summe -2).

Damit die Fläche zwischen den Nullstellen positiv ist, muss der Öffnungsfaktor (Koeffizient von x^2) von $g(x) - f(x)$ negativ sein, was hier der Fall ist.

$$\text{Die Fläche zwischen } f(x) \text{ und } g(x) \text{ ist } \int_{-2}^4 -3 \cdot (g(x) - f(x)) dx = -3 \cdot \int_{-2}^4 (x^2 - 2x - 8) dx =$$

$$-3 \cdot \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x \right) \Big|_{-2}^4 = -3 \cdot \left(\left(\frac{1}{3} \cdot 64 - 16 - 8 \cdot 4 \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot (-8) - 4 - 8 \cdot (-2) \right) \right) =$$

$$-3 \cdot \left(\left(\frac{64}{3} - 16 - 32 \right) - \left(-\frac{8}{3} - 4 + 16 \right) \right) = -3 \cdot \left(\left(\frac{64}{3} - \frac{48}{3} - \frac{96}{3} \right) - \left(-\frac{8}{3} - \frac{12}{3} + \frac{48}{3} \right) \right) = -3 \cdot \left(-\frac{80}{3} - \frac{28}{3} \right) = -3 \cdot -36 = 108$$



- b) Erst werden die Schnittpunkte der Graphen mit folgender Gleichung bestimmt: $f(x) = g(x)$, bzw. $g(x) - f(x) = 0$.

$$g(x) - f(x) = -2x^2 - x + 1 - (-4x^2 + 3x + 31) = -2x^2 + 4x + 30 = 0$$

$-2 \cdot (x^2 - 2x - 15) = 0$, also $-2 \cdot (x + 3)(x - 5) = 0$, also $x = -3$ oder $x = 5$. (Man sucht zwei Zahlen mit Produkt -15 und Summe -2).

Damit die Fläche zwischen den Nullstellen positiv ist, muss der Öffnungsfaktor (Koeffizient von x^2) von $g(x) - f(x)$ negativ sein, was hier der Fall ist.

$$\begin{aligned} \text{Die Fläche zwischen } f(x) \text{ und } g(x) \text{ ist } & \int_{-3}^5 -2 \cdot (g(x) - f(x)) \, dx = -2 \cdot \int_{-3}^5 (x^2 - 2x - 15) \, dx = \\ & -2 \cdot \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 15x \right) \Big|_{-3}^5 = -2 \cdot \left(\left(\frac{1}{3} \cdot 125 - 25 - 15 \cdot 5 \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot (-27) - 9 - 15 \cdot (-3) \right) \right) = \\ & -2 \cdot \left(\left(\frac{125}{3} - 25 - 75 \right) - (-9 - 9 + 45) \right) = -2 \cdot \left(\left(\frac{125}{3} - \frac{75}{3} - \frac{225}{3} \right) - (-9 - 9 + 45) \right) = -2 \cdot \left(-\frac{175}{3} - 27 \right) = \\ & -2 \cdot -\frac{256}{3} = \frac{512}{3} \end{aligned}$$

- c) Erst werden die Schnittpunkte der Graphen mit folgender Gleichung bestimmt: $f(x) = g(x)$, bzw. $g(x) - f(x) = 0$.

$$g(x) - f(x) = -x^2 - x + 1 - (-4x^2 + 2x + 19) = -3x^2 + 3x + 18 = 0$$

$-3 \cdot (x^2 - x - 6) = 0$, also $-3 \cdot (x + 2)(x - 3) = 0$, also $x = -2$ oder $x = 3$. (Man sucht zwei Zahlen mit Produkt -6 und Summe -1).

Damit die Fläche zwischen den Nullstellen positiv ist, muss der Öffnungsfaktor (Koeffizient von x^2) von $g(x) - f(x)$ negativ sein, was hier der Fall ist.

$$\begin{aligned} \text{Die Fläche zwischen } f(x) \text{ und } g(x) \text{ ist } & \int_{-2}^3 -3 \cdot (g(x) - f(x)) \, dx = -3 \cdot \int_{-2}^3 (x^2 - x - 6) \, dx = \\ & -3 \cdot \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x \right) \Big|_{-2}^3 = -3 \cdot \left(\left(\frac{1}{3} \cdot 27 - \frac{1}{2} \cdot 9 - 6 \cdot 3 \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot (-8) - \frac{1}{2} \cdot 4 - 6 \cdot (-2) \right) \right) = \\ & -3 \cdot \left(\left(9 - \frac{9}{2} - 18 \right) - \left(-\frac{8}{3} - 2 + 12 \right) \right) = -3 \cdot \left(\left(\frac{18}{2} - \frac{9}{2} - \frac{36}{2} \right) - \left(-\frac{8}{3} - \frac{6}{3} + \frac{36}{3} \right) \right) = -3 \cdot \left(-\frac{27}{2} - \frac{22}{3} \right) = \\ & -3 \cdot -\frac{125}{6} = \frac{125}{2} \end{aligned}$$

- d) Erst werden die Schnittpunkte der Graphen mit folgender Gleichung bestimmt: $f(x) = g(x)$, bzw. $g(x) - f(x) = 0$.

$$g(x) - f(x) = 2x^2 - 2x + 1 - (-x^2 - 5x + 7) = -3x^2 - 3x + 6 = 0$$

$-3 \cdot (x^2 + x - 2) = 0$, also $-3 \cdot (x + 2)(x - 1) = 0$, also $x = -2$ oder $x = 1$. (Man sucht zwei Zahlen mit Produkt -2 und Summe 1).

Damit die Fläche zwischen den Nullstellen positiv ist, muss der Öffnungsfaktor (Koeffizient von x^2) von $g(x) - f(x)$ negativ sein, was hier der Fall ist.

$$\begin{aligned} \text{Die Fläche zwischen } f(x) \text{ und } g(x) \text{ ist } & \int_{-2}^1 -3 \cdot (g(x) - f(x)) \, dx = -3 \cdot \int_{-2}^1 (x^2 + x - 2) \, dx = \\ & -3 \cdot \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x \right) \Big|_{-2}^1 = -3 \cdot \left(\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot (-8) + \frac{1}{2} \cdot 4 - 2 \cdot (-2) \right) \right) = \\ & -3 \cdot \left(\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) - \left(-\frac{8}{3} + 2 + 4 \right) \right) = -3 \cdot \left(\left(\frac{2}{6} + \frac{3}{6} - \frac{12}{6} \right) - \left(-\frac{8}{3} + \frac{6}{3} + \frac{12}{3} \right) \right) = -3 \cdot \left(-\frac{7}{6} - \frac{10}{3} \right) = \\ & -3 \cdot -\frac{27}{2} = \frac{27}{2} \end{aligned}$$

✳ Lösung zu Aufgabe 21.22 ex-herzflaeche

$$2 \cdot \int_0^2 (f(x) - g(x)) \, dx = 2 \cdot \int_0^2 \left(\sqrt{1 - (1-x)^2} + 3\sqrt{1 - \sqrt{\frac{x}{2}}} \right) dx = \pi + \frac{32}{5} \approx 4.771$$

Wobei π der Fläche der beiden Halbkreise über der x -Achse entspricht und $\frac{32}{5}$ der Fläche unter der x -Achse.

✳ Lösung zu Aufgabe 21.23 ex-vase

Man erhält folgendes Gleichungssystem:

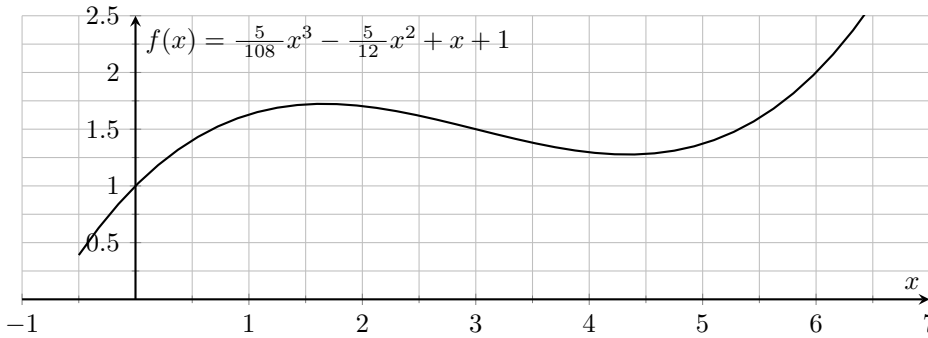
$$\begin{array}{rcl} f(0) = 1 & & d = 1 \\ f(6) = 2 & & 216a + 36b + 6c + d = 2 \\ f'(0) = 1 & & c = 1 \\ f'(6) = 1 & & 108a + 12b + c = 1. \end{array}$$



Daraus folgt $a = \frac{5}{108}$, $b = -\frac{5}{12}$, $c = 1$ und $d = 1$ und damit

$$f(x) = \frac{5}{108}x^3 - \frac{5}{12}x^2 + x + 1.$$

Hinweis: Definieren $f(x)$ im TR für die weiteren Berechnungen.



Das Volumen erhält man mit folgendem Integral:

$$\int_0^6 \pi(f(x))^2 dx = \int_0^6 \pi \left(\frac{5}{108}x^3 - \frac{5}{12}x^2 + x + 1 \right)^2 dx = \pi \cdot \frac{96}{7} \approx 43.08$$

Plausibilitäts-Check: Ein Zylinder mit Radius 1.5 und Höhe 6 hat ein Volumen von $\pi \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 6 \approx 42.41$.

Die Oberfläche erhält man mit folgendem Integral:

$$\int_0^6 2\pi f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 2\pi \int_0^6 \left(\frac{5}{108}x^3 - \frac{5}{12}x^2 + x + 1 \right) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{5}{36}x^2 - \frac{5}{6}x + 1 \right)^2} dx \approx 60.79$$

Plausibilitäts-Check: Ein Zylinder mit Radius 1.5 und Höhe 6 hat eine Mantelfläche von $2\pi \cdot \frac{3}{2} \cdot 6 = 18\pi \approx 56.54$.

✂ Lösung zu Aufgabe 21.24 ex-repe-stammfunktionen-bestimmen

- a) $\int x \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \ln(x) - x^{-1} + C = \ln(x) - \frac{1}{x} + C$
- b) $\int (2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)) dx = x^2 \cdot \sin(x) + C$ (Hat die Form $f'g + fg'$).
- c) $\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + C$
- d) $\int (1+x)^2 dx = \int (1+2x+x^2) dx = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + C$

✂ Lösung zu Aufgabe 21.25 ex-repe-bestimmte-integrale

- a) $\int_{-2}^3 \left(-\frac{1}{3}x^2 + 3x - \frac{1}{2} \right) dx = \left(-\frac{1}{9}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x \right) \Big|_{-2}^3 = \left(-3 + \frac{27}{2} - \frac{3}{2} \right) - \left(\frac{8}{9} + 6 + 1 \right) = 9 - \frac{71}{9} = \frac{10}{9}$
- b) $\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} \sin(x) - \frac{1}{3} \cos(x) \right) dx = \left(-\frac{1}{2} \cos(x) - \frac{1}{3} \sin(x) \right) \Big|_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} = \left(0 - \frac{1}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} - 0 \right) = -\frac{5}{6}$
- c) $\int_{-\ln(3)}^{\ln(5)} \sqrt{2} \cdot e^x dx = \sqrt{2} \cdot (e^x) \Big|_{-\ln(3)}^{\ln(5)} = \sqrt{2} \cdot \left(e^{\ln(5)} - e^{-\ln(3)} \right) = \sqrt{2} \cdot \left(5 - (e^{\ln(3)})^{-1} \right) = \sqrt{2} \cdot \left(5 - \frac{1}{3} \right) = \frac{14}{3} \sqrt{2}$
- d) $\int_1^{e^4} \frac{4}{x} dx = 4 \cdot \int_1^{e^4} \frac{1}{x} dx = 4 \ln(x) \Big|_1^{e^4} = 4 \cdot (4 - 0) = 16$



$$e) \int_1^4 \frac{2}{x^2} dx = 2 \cdot \int_1^4 x^{-2} dx = 2 \cdot (-x^{-1}) \Big|_1^4 = -2 \cdot \left(\frac{1}{4} - 1\right) = 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

$$f) \int_0^1 \cos(x^2) \cdot 2x dx = \sin(x^2) \Big|_0^1 = \sin(1) - \sin(0) = \sin(1) \text{ (Hat die Form } f'(g(x)) \cdot g'(x)\text{.)}$$

✂ Lösung zu Aufgabe 21.26 ex-repe-komplizierte-integrale-ueberpruefen

Man leitet die Stammfunktion ab und muss den Integranden (das im Integral) erhalten.

$$a) ((x-1) \cdot e^x + C)' = (x \cdot e^x - e^x + C)' = e^x + x \cdot e^x - e^x = x \cdot e^x$$

$$b) (x \ln(x) - x + C)' = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$$

c)

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2 \ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4} + C \right)' &= \left(\frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \ln(x) - \frac{1}{4} \cdot x^2 + C \right)' = \\ &= \frac{1}{2} \left(2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{2} x = x \cdot \ln(x) + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} x = x \cdot \ln(x) \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3} (\cos(x))^3 - \cos(x) + C \right)' &= \cos(x)^2 \cdot (-\sin(x)) + \sin(x) = (1 - \sin(x)^2) \cdot (-\sin(x)) + \sin(x) = \\ &= -\sin(x) + \sin(x)^3 - \sin(x) = \sin(x)^3 \end{aligned}$$

Man verwendet $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$.

✂ Lösung zu Aufgabe 21.27 ex-repe-flaeche-zwischen-kurve

a) $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = x^2 - \frac{\pi^2}{4}$. Man stellt fest, dass beide Funktionen bei $\pm \frac{\pi}{2}$ Nullstellen haben. Die Fläche beträgt also

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (f(x) - g(x)) dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos(x) - x^2 + \frac{\pi^2}{4} \right) dx = \\ &= \left(\sin(x) - \frac{1}{3} x^3 + \frac{\pi^2}{4} x \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi^3}{8} + \frac{\pi^3}{8} - \left(-1 + \frac{1}{3} \frac{\pi^3}{8} - \frac{\pi^3}{8} \right) = 2 + \frac{\pi^3}{6} \end{aligned}$$

b) $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = \sin(x)$. Die Cosinus- und Sinuswerte sind gleich bei $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ oder $-135^\circ = -\frac{3\pi}{4}$ (plus Vielfache von $360^\circ = 2\pi$). Die gesuchte Fläche ist also:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (f(x) - g(x)) dx &= \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos(x) - \sin(x)) dx = \\ &= (\sin(x) + \cos(x)) \Big|_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

c) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$. Die Schnittpunkte sind bei $x = 0$ und $x = 1$. Die gesuchte Fläche ist also:

$$\int_0^1 (g(x) - f(x)) dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - (0 - 0) = \frac{1}{3}$$



✳ Lösung zu Aufgabe 21.28 ex-repe-weg-aus-beschleunigung

a) Skizze.

$$b) a(t) = \begin{cases} \frac{1}{5}t & \text{für } 0 \leq t < 10 \\ -\frac{1}{5}(t-10) + 2 & \text{für } 10 \leq t \leq 20 \end{cases}$$

c) Die Geschwindigkeit zur Zeit t entspricht der Fläche unter der Beschleunigungskurve zwischen 0 und t . Für $t \leq 10$ erhält man:

$$v(t) = \int_0^t a(x) dx = \int_0^t \frac{1}{5}x dx = \frac{1}{10}x^2 \Big|_0^t = \frac{1}{10}t^2$$

Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 10$ beträgt also $v(10) = \frac{1}{10} \cdot 10 = 10$ m/s.
Für $10 \leq t \leq 20$ gilt:

$$v(t) = 10 + \int_{10}^t a(x) dx = 10 + \int_{10}^t \left(-\frac{1}{5}(x-10) + 2 \right) dx = 10 + \left(-\frac{1}{10}x^2 + 4x \right) \Big|_{10}^t = 10 - \frac{1}{10}t^2 + 4t + 10 - 40 = -\frac{1}{10}t^2 + 4t - 20$$

Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 20$ beträgt also
 $v(20) = -\frac{1}{10} \cdot 400 + 80 - 20 = -40 + 80 - 20 = 20$ m/s.

d) Die Positionsfunktion $s(t)$ entspricht der Fläche unter dem Geschwindigkeitsgraphen. Es gilt für $0 \leq t \leq 10$:

$$s(t) = \int_0^t v(x) dx = \int_0^t \frac{1}{10}x^2 dx = \frac{1}{30}x^3 \Big|_0^t = \frac{1}{30}t^3$$

Bis zum Zeitpunkt $t = 10$ wurde eine Strecke von $s(10) = \frac{1}{30} \cdot 1000 = \frac{100}{3} \approx 33.33$ m zurückgelegt.
Für $10 \leq t \leq 20$ gilt:

$$s(t) = \frac{100}{3} + \int_{10}^t v(x) dx = \frac{100}{3} + \int_{10}^t \left(-\frac{1}{10}x^2 + 4x - 20 \right) dx = \frac{100}{3} + \left(-\frac{1}{30}x^3 + 2x^2 - 20x \right) \Big|_{10}^t = \frac{100}{3} - \frac{1}{30}t^3 + 2t^2 - 20t + \frac{100}{3} - 200 + 200 = \frac{200}{3} - \frac{1}{30}t^3 + 2t^2 - 20t$$

Für $t = 20$ erhält man die Strecke nach 20 s:

$$s(20) = \frac{200}{3} - \frac{800}{3} + 800 - 400 = 200 \text{ m}$$

e) Nach 20 s hat die Bahn eine Geschwindigkeit von $20 \text{ m/s} = 72 \text{ km/h}$ und hat eine Strecke von 200 m zurückgelegt.

✳ Lösung zu Aufgabe 21.29 ex-repe-rotationsvolumen

$$V = \pi \int_1^4 f(x)^2 dx = \pi \int_1^4 \sqrt{x-2}^2 dx = \pi \int_1^4 x dx = \pi \frac{1}{2}x^2 \Big|_1^4 = \frac{15}{2}\pi \approx 23.56$$

Der Topf hat eine Höhe von 3 und einen Radius von 1 am Boden und 2 oben. Das Volumen eines Zylinders mit gleicher Höhe und Radius 1.5 hat ein Volumen von $V = \pi r^2 h = \pi \frac{9}{4} \cdot 3 \approx 21.21$.

Das Resultat ist also plausibel.

✳ Lösung zu Aufgabe 21.30 ex-skischanzenvolumen

Um die Funktion zu erhalten, die dem Verlauf der Schanze entspricht, muss die «normale» Sinus-Funktion $\sin(x)$ mit dem Faktor $\frac{20}{2\pi} = \frac{10}{\pi}$ in x -Richtung gestreckt werden: $(\sin(\frac{\pi}{10}x))$, dann um +5 Einheiten in x -Richtung verschoben werden: $(\sin(\frac{\pi}{10}(x-5)))$, und noch +1 in y -Richtung verschoben werden, also $f(x) = \sin(\frac{\pi}{10}(x-5)) + 1$.



Die Querschnittsfläche der Schanze ist also:

$$\int_0^{20} f(x) dx = \int_0^{20} \left(\sin\left(\frac{\pi}{10}(x-5)\right) + 1 \right) dx = \left(-\frac{10}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{10}(x-5)\right) + x \right) \Big|_0^{20} =$$

$$\left(-\frac{10}{\pi} \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 20 \right) - \left(-\frac{10}{\pi} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 0 \right) = \frac{10}{\pi} + 20 - \left(\frac{10}{\pi} + 0 \right) = 20 \text{ [m}^2\text{]}$$

Damit ist das Volumen $5 \cdot 20 = 100 \text{ [m}^3\text{]}$.

Bei einer geschätzten Schneedichte von 200 kg/m^3 wiegt die Schanze 20 Tonnen.

Zusatzaufgabe: Bei einer horizontalen Geschwindigkeit von $v \text{ [m/s]}$ im freien Fall gilt: $x = vt$ und $y = -\frac{1}{2}gt^2$.

Aus der ersten Gleichung folgt $t = \frac{x}{v}$. Eingesetzt in die zweite Gleichung: $y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v}\right)^2 = -\frac{g}{2v^2}x^2$. Die zweite Ableitung davon ist $y'' = -\frac{g}{v^2}$.

Die Zweite Ableitung der Schanzenkurve ist

$$f''(x) = -\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{10}(x-5)\right)$$

Im höchsten Punkt ist $f''(10) = -\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\left(\frac{\pi}{10}\right)^2$

Damit haben wir eine Gleichung für die Grenzgeschwindigkeit v :

$$-\frac{g}{v^2} = -\left(\frac{\pi}{10}\right)^2$$

$$\frac{v^2}{g} = \frac{100}{\pi^2}$$

$$v^2 = \frac{100g}{\pi^2}$$

$$v = \pm \frac{10\sqrt{g}}{\pi} \approx 9.970 \text{ [m/s]}$$

Das entspricht knapp 36 km/h .

✳ Lösung zu Aufgabe 21.31 ex-konstante-leistung-beschleunigen

Die Energiezunahme ist bei konstanter Leistung linear zunehmend. D.h. $E(t) = P \cdot t$, wobei P hier gerade die Leistung ist. Und ja, die Energie ist das Integral über die Leistung, bzw. die Leistung ist die Ableitung der Energie.

Damit die kinetische Energie eine lineare Funktion ist, muss die Geschwindigkeitsfunktion, die im Quadrat erscheint, eine Wurzelfunktion sein, d.h. $v(t) = c \cdot \sqrt{t}$, wobei c eine Konstante ist, die von der Leistung und der Masse abhängig ist.

Die Beschleunigungsfunktion ist die Ableitung der Geschwindigkeitsfunktion, also $a(t) = c \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}$.

Für $t = 0$ ist die Beschleunigungsfunktion gar nicht definiert (bzw. unendlich gross). Für sehr kleine t ist die Beschleunigung sehr gross, und damit auch die Kraft, die auf den Fahrer wirkt.

D.h. für eine sehr kurze Zeit wirkt plötzlich eine sehr grosse Kraft auf den Fahrer, was als Schlag (oder Tritt in den Allerwertesten) empfunden wird. Das deckt sich mit den Aussagen von Test-Fahrern.