20 Kurvendiskussion und Extremalaufgaben

Mit Kurvendiskussion ist die Untersuchung und Beschreibung geometrischer Eigenschaften des Graphen einer Funktion (= der Kurve) gemeint. Dabei geht es zum Beispiel um die Ermittlung interessanter Punkte des Funktionsgraphen (Hoch- und Tiefpunkte, Wendepunkte), aber auch um Null- und Polstellen, eventuelle Symmetrien des Graphen (etwa Spiegelsymmetrie bezüglich der y-Achse) oder um Asymptoten an den Graphen.

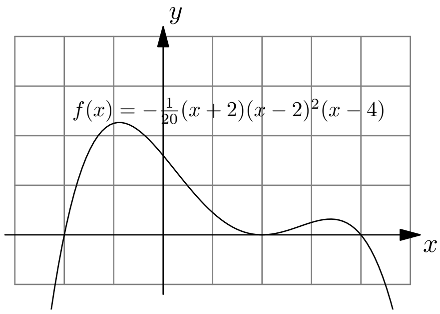
20.1 Nullstellen

Definition 20.1.1 Nullstellen

Die **Nullstellen** einer Funktion f sind jene x-Werte (= Stellen), für die die Funktion Null ist:

$$x \text{ ist Nullstelle von f} \iff f(x) = 0$$

Die Nullstellen von f sind die x-Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen von f mit der x-Achse. (Auch Berührpunkte werden als Schnittpunkte gewertet.)

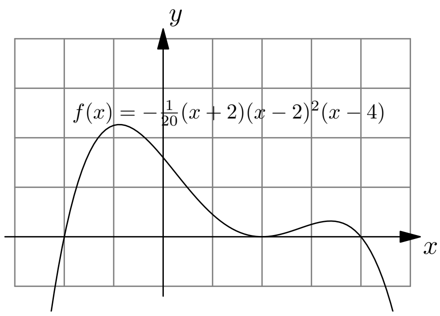


20.2 Extremalstellen

Definition 20.2.1 Lokale und globale Maxima/Minima; Hoch-/Tiefpunkte; Maximal-/Minimalstellen

Man sagt, dass eine Funktion f an einer Stelle x_0 ein **lokales Maximum** (bzw. **lokales Minimum**) hat, wenn $f(x_0)$ in einer geeignet kleinen Umgebung von x_0 der maximale (bzw. der minimale) Funktionswert von f ist.
Man nennt dann

- $(x_0, f(x_0))$ einen **Hochpunkt** (bzw. **Tiefpunkt**).
- x_0 eine **Maximalstelle** (bzw. **Minimalstelle**);
- $f(x_0)$ ein **lokales Maximum** (bzw. **lokales Minimum**);



Man sagt, dass eine Funktion f an einer Stelle x_0 ein **globales Maximum** (bzw. **globales Minimum**) hat, wenn $f(x_0)$ der grösste (bzw. der kleinste) Funktionswert von f auf dem *gesamten* Definitionsbereich ist.
Wenn man von den **Extrempunkten** einer Funktion spricht, meint man damit die Menge aller Hoch- und Tiefpunkte der Funktion.
Mit den **Extremstellen** einer Funktion meint man die Menge aller Maximal- und Minimalstellen.
Mit den **Extrema** einer Funktion meint man die Menge aller lokalen und globalen Maxima und Minima.

Merke 20.2.2

Hat f bei x_0 ein Extremum (d. h. lokales Maximum oder Minimum), so folgt $f'(x_0) = 0$.

Mit anderen Worten: Die Lösungen der Gleichung $f'(x) = 0$ sind die Kandidaten für die Extremstellen von f.

Beispiel 20.2.3. Aus $f'(x_0) = 0$ folgt nicht automatisch, dass x_0 eine Extremalstelle ist. Skizzieren Sie dazu den Graphen der Funktion $f(x) = x^3$.

Aufgabe 20.1 Bestimmen Sie alle Extremalpunkte der Funktion $f(x) = x^2 - 4x + 5$. Wie viele Extremalpunkte erwarten Sie und sind das Minima oder Maxima? ✎

Definition 20.2.4 Zweite, dritte und höhere Ableitungen

Ist f eine Funktion, so wird ihre Ableitung f' auch als **erste Ableitung** von f bezeichnet.
Die Ableitung von f' wird als f'' notiert und heisst **zweite Ableitung** von f.
Die Ableitung von f'' wird als f''' notiert und heisst **dritte Ableitung** von f.
Weitere Ableitungen werden auch wie folgt notiert: $f'''(x) = f^{(3)}(x)$, die n-te Ableitung wäre dann $f^{(n)}(x)$

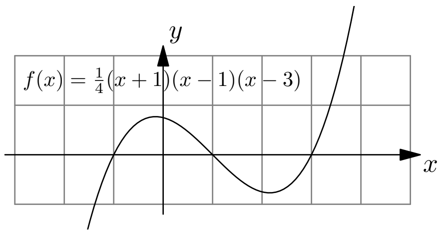
20.2.5. Beschreibt $s(t)$ die von einem Velofahrer zum Zeitpunkt t zurückgelegte Strecke, so ist die Ableitung (nach t) $s'(t)$ die (Momentan-)Geschwindigkeit und $s''(t)$ die Beschleunigung.

Aufgabe 20.2 Gegeben ist eine Funktion f und deren erste und zweite Ableitung. Wenn an einer Stelle x_0 die zweite Ableitung positiv (bzw. negativ) ist, was bedeutet das für den Graphen von f an der Stelle x_0?

✎

Merke 20.2.6

Sei f eine Funktion und x_0 eine reelle Zahl.



- Kriterium für lokales Maximum

$$\left.\begin{array}{l} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ hat lokales Maximum bei } x_0$$

- Kriterium für lokales Minimum

$$\left.\begin{array}{l} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ hat lokales Minimum bei } x_0$$

Definition 20.2.7 Sattelpunkt

Man sagt, dass eine Funktion f bei x_0 einen **Sattelpunkt hat**, wenn $f'(x_0) = 0$ gilt, die Funktion aber in jeder Umgebung von x_0 echt grössere und echt kleinere Werte als $f(x_0)$ annimmt.

Aufgabe 20.3 Finden Sie je eine Funktion f für die $f'(0) = 0$ und $f''(0) = 0$, wobei 0 einmal eine Minimalstelle, eine Maximalstelle und einmal ein Sattelpunkt ist. ✎

20.2.8. Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$ gilt, kann es sich um ein Maximum, um ein Minimum oder um einen Sattelpunkt handeln.

20.3 Wendestellen

Definition 20.3.1 Wendepunkt und Wendestelle

Ein **Wendepunkt** einer Funktion ist ein Punkt ihres Funktionsgraphen, in dem der Graph sein Krümmungsverhalten ändert: Er wechselt von einer Links- zu einer Rechtskurve oder umgekehrt.

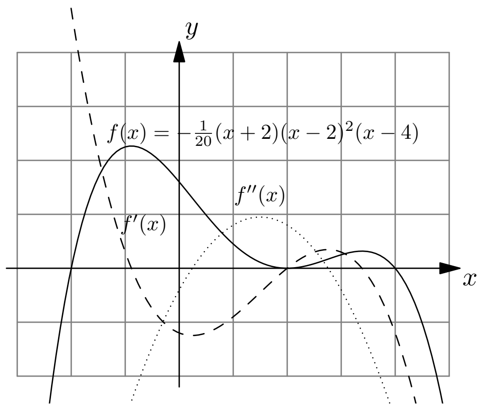
Eine **Wendestelle** ist die x-Koordinate eines Wendepunkts.

D.h. in einem Wendepunkt ist die Steigung maximal oder minimal; folglich ist die zweite Ableitung an dieser Stelle Null.

Merke 20.3.2 Hinreichende Bedingung für eine Wendestelle

Ist $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$, so hat man mit Sicherheit einen Wendepunkt.

Nur aus $f''(x) = 0$ kann nicht mit Sicherheit auf einen Wendepunkt geschlossen werden. Beispielsweise hat $f(x) = x^4$ keinen Wendepunkt bei $x = 0$.



Aufgabe 20.4 Bestimmen Sie die Nullstellen, Extremalstellen und Wendestellenkandidaten folgender Funktionen. Lösen Sie die Gleichungen jeweils von Hand. Bestimmen Sie die Art der Extremalstellen mit der zweiten Ableitung. Berechnen Sie in den Nullstellen und Wendestellenkandidaten zusätzlich die Tangentensteigung des Funktionsgraphen.
Machen Sie eine Tabelle mit den «interessanten» x-Werten und den entsprechenden Funktions- und Ableitungswerten an diesen Stellen. Skizzieren Sie am Schluss mit den errechneten Daten den Funktionsgraphen, d.h. tragen Sie zuerst die errechneten Punkte mit den entsprechenden Tangenten ein.

a) $f(x) = (x+1) \cdot x \cdot (x-1)$

b) $f(x) = -\frac{1}{20}(x+2)(x-2)^2(x-4)$

20.4 Einsatz des TR

Der Taschenrechner kann auch ableiten. Dabei muss jeweils angegeben werden, nach welcher Variablen abgeleitet werden soll. Das ist in der Mittelschulmathematik fast immer x, in der Physik meistens t.
Der Ableitungsoperator wird mit F3 1 oder 2nd 8 eingegeben. Darauf folgt die Funktion und nach einem Komma die Variable, nach der abgeleitet werden soll:
Beispiel: `d(x^4-2*x,x)` liefert $4 \cdot x^3 - 2$.
Höhere Ableitungen werden wie folgt eingegeben (hier die dritte):
`d(x^4-2*x,x,3)` liefert $24 \cdot x$.

Merke 20.4.1 Der Infinitesimal-Operator d

In der Notation
$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$$
steht das «d» für eine infinitesimale Differenz, d.h. eine von Null verschiedene «Zahl», die aber kleiner als jede reelle Zahl ist. Damit ist «d» keine reelle Zahl. Die Notation kommt vom Differenzenquotienten:
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x).$$

Nullstellen einer Funktion (z.B. $f(x) = x^3 - x$) können mit `zeros(x^3-x, x)` bestimmt werden. Das zweite x gibt an, nach welcher Variable die Gleichung gelöst werden soll. Die `zeros`-Funktion erhält man mit F2 4. Der Vorteil von `zeros` gegenüber `solve` ist, dass man eine Liste erhält, die danach weiterverarbeitet werden kann. Z.B. können in diesen Punkten die Ableitungen ausgewertet werden.

Kurvendiskussion mit dem TI-92 Plus

Funktion speichern Z.B. mit `1/(x^2+1) → f(x)`.

Ableitungen speichern `d(f(x),x) → f1(x)` und `d(f1(x),x) → f2(x)`.

Nullstellen bestimmen `zeros(f(x),x) → ns` speichert die Nullstellen von $f(x)$ in der Variablen `ns`. Analog dazu werden die Nullstellen von `f1` (Ableitung) in `es` (Extremalstellenkandidaten) gespeichert und die Nullstellen von `f2` (zweite Ableitung) in `ws` (Wendestellenkandidaten) gespeichert.

Steigungen bestimmen `f1(ns)` und `f1(ws)` liefern die Steigungen in den Null- und Wendestellen.

y-Koordinaten bestimmen `f(es)` und `f(ws)` liefern die y-Koordinaten der Extremal- und Wendestellen.

Aufgabe 20.5 Bestimmen Sie die Nullstellen, Extremalstellen und Wendestellenkandidaten folgender Funktionen mit Hilfe vom TR.
Machen Sie eine Tabelle mit den «interessanten» x-Werten und den entsprechenden Funktions- und Ableitungswerten an diesen Stellen. Skizzieren Sie am Schluss mit den errechneten Daten den Funktionsgraphen, d.h. tragen Sie zuerst die errechneten Punkte mit den entsprechenden Tangenten ein.

a) $f(x) = \frac{5x}{x^2+1} - \frac{1}{2}x$

b) $f(x) = \ln\left(1+x^2\right)$

Automatisierung

Um die Berechnungen für die Kurvendiskussion zu automatisieren schreiben wir ein Programm, mit dem Namen `kd` (kurz für Kurvendiskussion): APPS 7 (Programm Editor) 3 (New…), Variable `kd`, bestätigen.
Zwischen `Prgm` und `EndPrgm` geben Sie folgendes Programm ein (Ableitungsoperator mit 2nd 8):

```
d(f(x),x) → f1(x)
d(f1(x),x) → f2(x)
zeros(f(x),x) → ns
zeros(f1(x),x) → es
zeros(f2(x),x) → ws
```

Man könnte das Programm noch ausbauen und alle Stellen zusammenfassen und die entsprechenden y-Koordinaten und Steigungen ausrechnen:

```
augment(augment(ns,es),ws) → xx
f(xx) → yy
f1(xx) → mm
```

Daraus kann der «interessante» Bereich der Funktion bestimmt werden mit `min(xx)` und `max(xx)` etc. Daraus können die Variablen `xmin` etc. festgelegt werden, die den Zoombereich festlegen. Mit "Mit `DrawSlp x,y,m` können Tangenten eingezeichnet werden und mit `Circle x,y,r` könnten Punkte markiert werden.

Aufgabe 20.6 Skizzieren Sie jeweils die Graphen der Funktion f (inklusive Tangenten) anhand folgender Resultate einer Kurvendiskussion. Bei Aufgaben b) und d) fehlen Einträge. Wie könnten diese aussehen und warum?

a)

x	-3	-2	-1	0	1	3
$y = f(x)$	-3	0	1	0.5	0	1
$f'(x)$	5	2	0	-1	0	1
$f''(x)$	0	-1	-1	0	1	0
$f'''(x)$	3	2	2	3	-2	-1

b)

x	-2	-1	0	1	2
$y = f(x)$	-2	0	1	2	2.5
$f'(x)$	0	3	0.5	2	0
$f''(x)$	2	0	0	0	-2
$f'''(x)$	0	3	2	-1	2

c)

x	-2	-1	1	2
$y = f(x)$	2	0	-1	0
$f'(x)$	-4	-1	0	3
$f''(x)$	0	2	1	2
$f'''(x)$	1	0	0	1

d)

x	-2	0	2	3
$y = f(x)$	0	2	1	0
$f'(x)$	2	0	0	-2
$f''(x)$	-1	-1	0	-3
$f'''(x)$	-1	1	1	2

20.5 Extremalaufgaben

Der Fokus bei Extremalaufgaben liegt auf der Modellierung, d.h. der Umsetzung eines beschreibenden Texts in eine präzise mathematische Formulierung. Ist die Formulierung abgeschlossen, kann die Aufgabe fast vollständig automatisiert gelöst werden. Z.B. mit dem CAS-fähigen Taschenrechner oder einem beliebigen CAS-Programm. (CAS steht für «Computer Algebra System» und bezeichnet Software, die symbolische mathematische Ausdrücke verarbeiten und manipulieren kann, wie z.B. Gleichungen lösen, ableiten, usw.)

In Extremalaufgaben ist eine (oder mehrere) Grösse(n) so zu bestimmen, dass eine andere Grösse möglichst gross oder klein wird. Als Beispiel ist die Höhe (und Radius) einer Büchse mit 1 l Volumen zu bestimmen, die eine möglichst kleine Oberfläche (Metallverbrauch) hat.

Das Vorgehen ist folgendes: Man bestimmt eine **Stellgrösse** (hier die Höhe), aus der die **Zielgrösse** (hier die Oberfläche) mit Hilfe der **Nebenbedingung** (Inhalt 1 l) berechnet werden kann. Man erhält so eine Funktion, von der man das Maximum oder Minimum sucht.

Oft ist die Stellgrösse zusätzlich eingeschränkt (hier z.B. muss die Höhe positiv sein), was den Definitionsbereich der Funktion ergibt. Das gesuchte Minimum oder Maximum kann also auch auf dem Rand des Definitionsbereichs liegen. Dies ist durch Auswerten der Funktion zu überprüfen.

Aufgabe 20.7 Welche Höhe und welchen Radius hat eine Büchse mit 1 l Volumen und minimaler Oberfläche?

Stellgrösse: h (Höhe) in dm
Zielgrösse: $O = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$ in dm^2
Nebenbedingung: $V = 1$ dm^3 mit $V = h \cdot \pi r^2$.

Aus der Nebenbedingung erhalten wir $r =$.

Und damit $O(h) =$

Wir suchen jenes h, das zu minimaler Oberfläche führt. Dazu leiten wir nach h ab und setzen dann Null (horizontale Tangente):

✎

Der Rand des Definitionsbereichs kann ignoriert werden. Geht h gegen Null, wächst r und damit O beliebig.

Mit der zweiten Ableitung könnte überprüft werden, dass es sich wirklich um ein Minimum handelt. Betrachtet man die Funktion $O(h)$ für sehr grosse h, kann man einsehen, dass die Funktion wie eine Wurzelfunktion anwächst (der Term $\frac{2}{h}$ wird beliebig klein).

Zum Vergleich: Oberfläche eines Würfels mit 1 l Inhalt: ✎ .

Kugel mit 1 l Inhalt: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ und $O = 4\pi r^2$. Also $r =$

Aufgabe 20.8 Welche Höhe und Radius hat eine Büchse mit 1 l Volumen und minimaler Oberfläche? Lösen Sie die Aufgabe mit r (anstatt h) als Stellgrösse.

Vereinfachungen beim Bestimmen von Extremalstellen

Sei $f(x)$ eine Funktion, von der man Extremalstellen bestimmen möchte. Bevor man ableitet und die Ableitung Null setzt, kann es sich lohnen, die Funktion durch eine andere Funktion $g(x)$ zu ersetzen, um die Berechnungen zu vereinfachen. Folgende Funktionen $g(x)$ haben dieselben Extremalstellen wie $f(x)$:

- $g(x) = c \cdot f(x)$ für $c \in \mathbb{R}^+$ und $g(x) = f(x) + c$ für $c \in \mathbb{R}$.
- $g(x) = (f(x))^2$ und $g(x) = \sqrt{f(x)}$ wenn $f(x) \geq 0$ auf dem betrachteten Definitionsbereich.

Die zweiten Ersetzungen sind speziell bei Abstandsproblemen interessant, da das Quadrat des Abstands oft eine einfachere Form hat.

Merke 20.5.1 Abstand Punkt-Kurve

Der Abstand von einem Punkt P zu einer Kurve c ist definiert als der kleinste Abstand aller Abstände der Punkte C auf c zum Punkt P.

Aufgabe 20.9 Berechnen Sie den Abstand folgender Parabeln zum Ursprung. Skizzieren Sie jeweils die Parabeln von Hand und schätzen Sie damit den Abstand ab. *Hinweis: Wenn der Scheitelpunkt der Parabel nicht direkt abzulesen ist, berechnen Sie diesen mit Hilfe des Extremums der Parabel.*

Programmieren Sie diesen Typ von Aufgabe auf dem TR, analog zur Kurvendiskussion.

a) $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2 + 1$

b) $f(x) = -\frac{1}{4}(x-1)^2 - 1$

c) $f(x) = x^2 - 2x - 2$

d) $f(x) = -x^2 + x + 2$

Aufgabe 20.10 *Folgende Aufgaben sind aus dem «Mathematik-Repetitorium für den Maturastoff» der Fachgruppe Mathematik der Kantonsschule am Burggraben, St.Gallen.*

a) Aus einem Drahtstück der Länge $L = 180$ cm soll das Drahtmodell eines Quaders geformt werden, der viermal so lang wie breit ist und dessen Volumen maximal werden soll.

b) Einem gleichseitigen Dreieck mit der Seite $a = 7$ cm ist ein Parallelogramm mit maximalem Inhalt einzubeschreiben, das mit dem Dreieck einen Winkel gemeinsam hat.

c) Im Intervall $[0, \pi]$ soll dem Graphen von $f(x) = 3 \cdot \sin(x)$ ein Rechteck $ABCD$ so einbeschrieben werden, dass die Strecke AB auf der x-Achse und die Punkte C, D auf dem Graphen von f liegen und der Umfang maximal ist.

d) Welcher Punkt auf der Parabel p: $y = \frac{1}{2}x^2$ hat den kleinsten Abstand vom Punkt $P = (6, 0)$?

Aufgabe 20.11 Ziel ist es, die Kurve $h(x)$ (Hüllkurve genannt) zu bestimmen, die bei einem Fadenbild entsteht. *Die Lage ist hier so gewählt, dass die Kurve tatsächlich auch durch einen Funktionsgraphen beschrieben werden kann.*

a) Fertigen Sie folgende Skizze an: Einheit 4 Häuschen, zwei Strecken s_f von $A = (-2, 1)$ zu $B = (0, -1)$ und s_g von $B = (0, -1)$ zu $C = (2, 1)$. Auf diesen Strecken tragen Sie je 9 Punkte mit gleichem Abstand ein, jeweils auf Häuschenschnittpunkten. Verbinden Sie dann $(-2, 1)$ mit $(0, -1)$, $(-1.75, 0.75)$ mit $(0.25, -0.75)$, $(-1.5, 0.5)$ mit $(0.5, -0.5)$ usw. um das Fadenbild zu erhalten. Diese Geraden werden im folgenden «Fadengeraden» genannt.

b) Sei t ein Parameter in $[0, 1]$. Damit sollen die Koordinaten der Punkte auf der Strecke s_f beschrieben werden. Bestimmen Sie dazu zwei Funktionen $f_x(t)$ und $f_y(t)$, die die Koordinaten von Punkten auf s_f liefern, und zwar so, dass man für $t = 0$ den Punkt $A = (f_x(0), f_y(0))$ und für $t = 1$ den Punkt $B = (f_x(1), f_y(1))$ erhält. *Hinweis: Skizzieren Sie dazu erst die Graphen der Funktionen $f_x(t)$ und $f_y(t)$.*

c) Bestimmen Sie analog dazu für die Strecke s_g zwei Funktionen $g_x(t)$ und $g_y(t)$, so dass $B = (g_x(0), g_y(0))$ und $C = (g_x(1), g_y(1))$.

d) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $\ell(x)$ der zweiten eingezeichneten «Fadengeraden» von $(-1.75, 0.75)$ zu $(0.25, -0.75)$. Welchem Wert von t entspricht diese Gerade?

e) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden durch die allgemeinen Punkte $P = (p_x, p_y)$ und $Q = (q_x, q_y)$.

f) Für ein allgemeines t, bestimmen Sie die Funktionsgleichung $k_t(x)$ für die «Fadengerade», die dem Parameter t entspricht (d.h. die Funktionsgleichung jener Geraden, die durch die Punkte $(f_x(t), f_y(t))$ und $(g_x(t), g_y(t))$ geht. Bringen Sie die Funktion auf die Form «x mal Polynom in t plus faktorisiertes Polynom in t».

g) Ein Punkt (x_p, y_p) auf der Hüllkurve (mit $y_p = h(x_p)$) liegt auf jener «Fadengeraden» $k_t(x)$, die an der Stelle x_p das grösste y_p hat. Für $x_p = 1$ bestimmen Sie jenen t-Wert, für den die Funktion $k_t(1)$ den grössten Wert liefert und bestimmen Sie diesen Wert. Damit haben Sie einen Punkt der Hüllkurve bestimmt.

h) Für einen allgemeinen Wert x_p bestimmen Sie jenen t-Wert, für den $k_t(x_p)$ maximal ist. Bestimmen Sie so den zugehörigen Wert y_p. Damit ist h bestimmt mit $h(x_p) = y_p$.

i) Wie interpretieren Sie die Funktion h für x-Werte ausserhalb von $[-2, 2]$? Macht das geometrisch Sinn?

Aufgabe 20.12 «Hier könnte Ihre Aufgabe stehen.»

Entwerfen Sie eine eigene Extremalaufgabe und schicken Sie mir diese mit Lösung (handgeschrieben reicht).

20.6 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

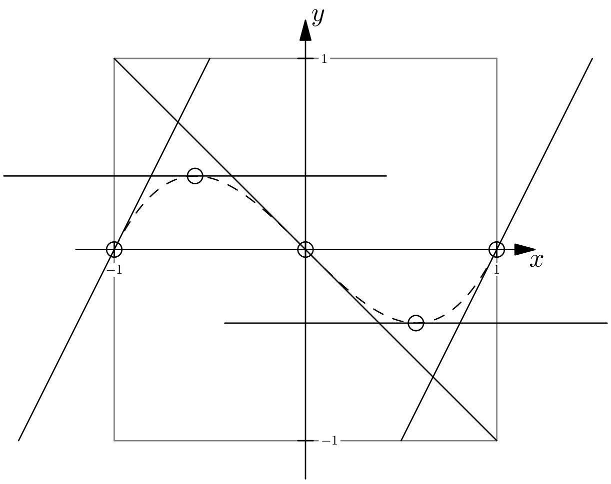
Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe 20.4 ex-kurvendiskussion-von-hand

a) **Nullstellen**: $0 = f(x) = (x-1)\,x\,(x+1)$
$x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$
Ableitung $f'(x) = x\,(x+1) + (x-1)\,(x+1) + (x-1)\,x = 3\,x^2 - 1$
Nullstellen der Ableitung: $x_4 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_5 = \frac{1}{\sqrt{3}}$
Zweite Ableitung $f''(x) = 6\,x$
Nullstellen der zweiten Ableitung und mögliche Wendestellen: $x_6 = 0$
Interessante Stellen:

x	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
x	-1.0000	$-.5773$	0.0000	$.5773$	1.0000
$f(x)$	0.0000	$.3849$	0.0000	$-.3849$	0.0000
$f'(x)$	2.0000	$.0000$	-1.0000	$.0000$	2.0000
$f''(x)$	-6.0000	-3.4641	0.0000	3.4641	6.0000

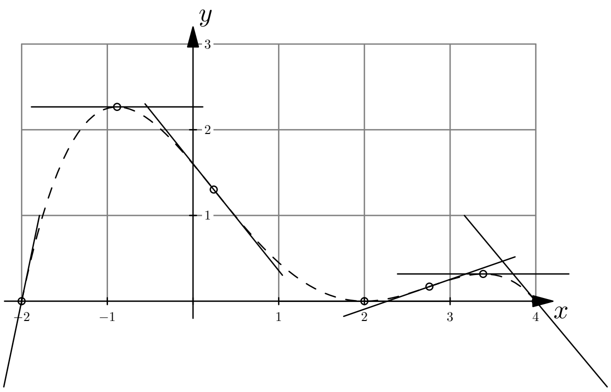
Extrema:
$x_4 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \approx -.5773$, $f(x_4) = \frac{(\sqrt{3}-1)\,(\sqrt{3}+1)}{3^{\frac{3}{2}}} \approx .3849$: $f'' < 0$, Maximum
$x_5 = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx .5773$, $f(x_5) = -\frac{(\sqrt{3}-1)\,(\sqrt{3}+1)}{3^{\frac{3}{2}}} \approx -.3849$: $f'' > 0$, Minimum



b) **Nullstellen**: $0 = f(x) = -\frac{(x-4)\,(x-2)^2\,(x+2)}{20}$
$x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$
Ableitung $f'(x) = -\frac{(x-4)\,(x-2)\,(x+2)}{10} - \frac{(x-2)^2\,(x+2)}{20} - \frac{(x-4)\,(x-2)^2}{20} = -\frac{(x-2)\left(2\,x^2-5\,x-6\right)}{10}$
Nullstellen der Ableitung: $x_4 = -\frac{\sqrt{73}-5}{4}$, $x_5 = \frac{\sqrt{73}+5}{4}$, $x_6 = 2$
Zweite Ableitung $f''(x) = -\frac{3\,x^2-9\,x+2}{5}$
Nullstellen der zweiten Ableitung und mögliche Wendestellen: $x_7 = -\frac{\sqrt{57}-9}{6}$, $x_8 = \frac{\sqrt{57}+9}{6}$
Interessante Stellen:

x	-2	$-\frac{\sqrt{73}-5}{4}$	$-\frac{\sqrt{57}-9}{6}$	2	$\frac{\sqrt{57}+9}{6}$	$\frac{\sqrt{73}+5}{4}$	4
x	-2.0000	$-.8860$	$.2416$	2.0000	2.7583	3.3860	4.0000
$f(x)$	0.0000	2.2667	1.3023	0.0000	$.1698$	$.3176$	0.0000
$f'(x)$	4.8000	$-.0000$	-1.2469	0.0000	$.3469$	$.0000$	-1.2000
$f''(x)$	-6.4000	-2.4658	0.0000	$.8000$	$.0000$	-1.1841	-2.8000

Extrema:
$x_4 = -\frac{\sqrt{73}-5}{4} \approx -.8860$, $f(x_4) = -\frac{\left(\sqrt{73}-13\right)\left(\sqrt{73}+3\right)^2\left(\sqrt{73}+11\right)}{5120} \approx 2.2667$: $f'' < 0$, Maximum
$x_5 = \frac{\sqrt{73}+5}{4} \approx 3.3860$, $f(x_5) = -\frac{\left(\sqrt{73}-11\right)\left(\sqrt{73}-3\right)^2\left(\sqrt{73}+13\right)}{5120} \approx .3176$: $f'' < 0$, Maximum
$x_6 = 2 \approx 2.0000$, $f(x_6) = 0 \approx 0.0000$: $f'' > 0$, Minimum



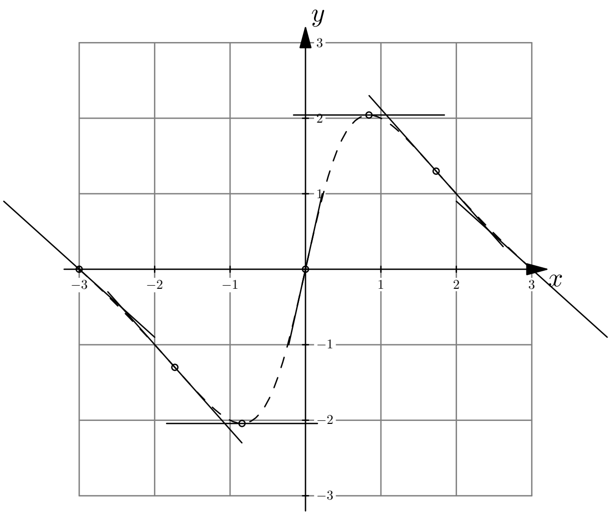
Lösung zu Aufgabe 20.5 ex-kurvendiskussion-mit-tr

I. Blöchliger, O. Schnürer

a) **Nullstellen**: $0 = f(x) = \frac{5\,x}{x^2+1} - \frac{x}{2}$
$x_1 = -3,\ x_2 = 3,\ x_3 = 0$
Ableitung $f'(x) = \frac{5}{x^2+1} - \frac{10\,x^2}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{2} = -\frac{x^4+12\,x^2-9}{2\,(x^2+1)^2}$
Nullstellen der Ableitung: $x_4 = -\sqrt{3}\,\sqrt{\sqrt{5}-2},\ x_5 = \sqrt{3}\,\sqrt{\sqrt{5}-2}$
Zweite Ableitung $f''(x) = \frac{10\,x\,\left(x^2-3\right)}{(x^2+1)^3}$
Nullstellen der zweiten Ableitung und mögliche Wendestellen: $x_6 = -\sqrt{3},\ x_7 = \sqrt{3},\ x_8 = 0$
Interessante Stellen:

x	-3	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}\,\sqrt{\sqrt{5}-2}$	0	$\sqrt{3}\,\sqrt{\sqrt{5}-2}$	$\sqrt{3}$	3
x	-3.0000	-1.7320	$-.8415$	0.0000	$.8415$	1.7320	3.0000
$f(x)$	0.0000	-1.2990	-2.0424	0.0000	2.0424	1.2990	0.0000
$f'(x)$	$-.9000$	-1.1250	$-.0000$	4.5000	$-.0000$	-1.1250	$-.9000$
$f''(x)$	$-.1800$	0.0000	3.8693	0.0000	-3.8693	0.0000	$.1800$

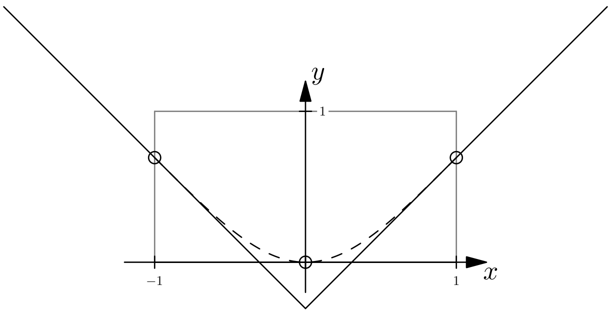
Extrema:
$x_4 = -\sqrt{3}\,\sqrt{\sqrt{5}-2} \approx -.8415,\ f(x_4) = \frac{3^{\frac{3}{2}}\,\left(\sqrt{5}-5\right)\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2\left(3\sqrt{5}-5\right)} \approx -2.0424$: $f'' > 0$, Minimum
$x_5 = \sqrt{3}\,\sqrt{\sqrt{5}-2} \approx .8415,\ f(x_5) = -\frac{3^{\frac{3}{2}}\,\left(\sqrt{5}-5\right)\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2\left(3\sqrt{5}-5\right)} \approx 2.0424$: $f'' < 0$, Maximum



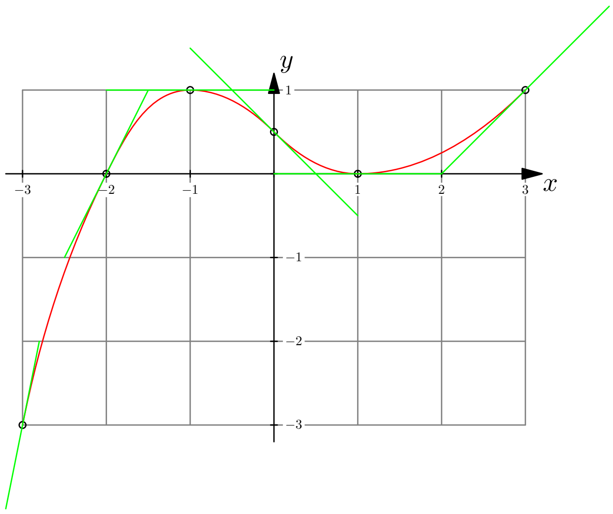
b) **Nullstellen**: $0 = f(x) = \log\left(x^2+1\right)$
$x_1 = 0$
Ableitung $f'(x) = \frac{2\,x}{x^2+1}$
Nullstellen der Ableitung: $x_2 = 0$
Zweite Ableitung $f''(x) = -\frac{2\,(x-1)\,(x+1)}{(x^2+1)^2}$
Nullstellen der zweiten Ableitung und mögliche Wendestellen: $x_3 = -1$, $x_4 = 1$
Interessante Stellen:

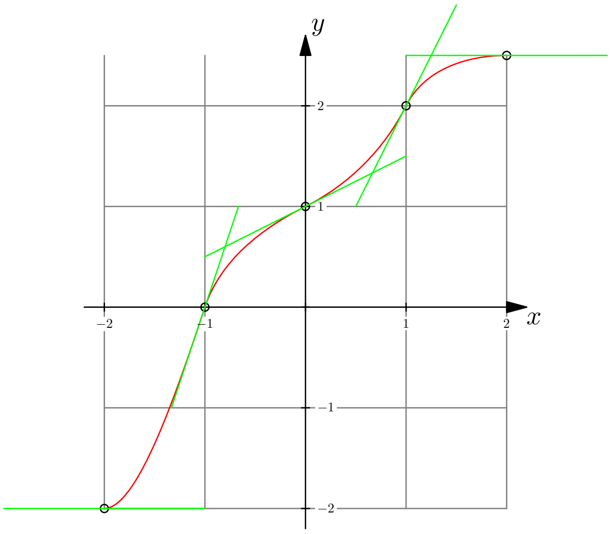
x	-1	0	1
x	-1.0000	0.0000	1.0000
$f(x)$	$.6931$	0.0000	$.6931$
$f'(x)$	-1.0000	0.0000	1.0000
$f''(x)$	0.0000	2.0000	0.0000

Extrema:
$x_2 = 0 \approx 0.0000$, $f(x_2) = 0 \approx 0.0000$: $f'' > 0$, Minimum

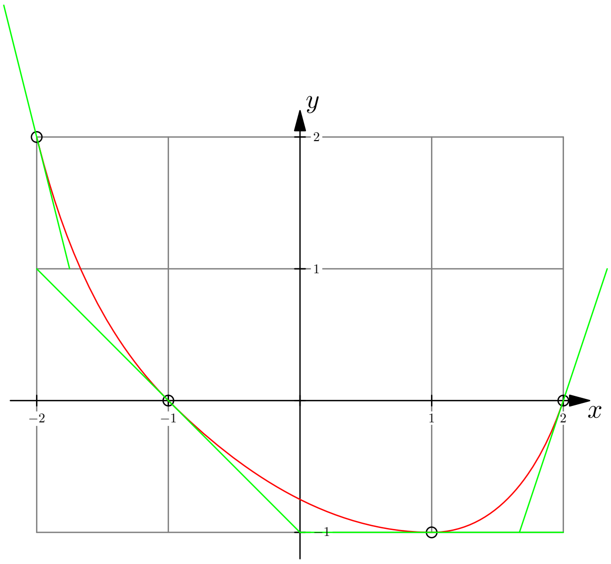


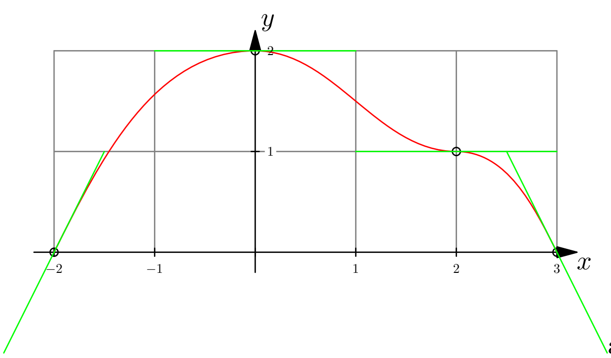
Lösung zu Aufgabe 20.6 ex-kurvendiskussion-resultate-zeichnen

a) 

b) 

Links und rechts fehlt noch eine Nullstelle oder Wendestelle.
Z.B. bei $x = 2$ ist $f''(2) < 0$, es handelt sich also um ein Maximum. D.h. rechts davon ist $f'(x) < 0$ und die Funktion nimmt ab. Wird diese Abnahme nicht wieder kleiner, hat die Funktion noch eine fehlende Nullstelle. Hat die Funktion keine Nullstelle mehr, muss die Abnahme wieder kleiner werden, was eine Wendestelle bedeutet.

c) 

d) 

a

Bei ca. $x = 1$ fehlt eine Wendestelle.

Lösung zu Aufgabe 20.8 ex-zylinder-minimale-oberflaeache-fuer-volumen
Stellgrösse: r (Radius) in dm
Zielgrösse: $O = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$ in dm^2
Nebenbedingung: $V = 1\ \text{dm}^2$ mit $V = h \cdot \pi r^2$.
Aus der Nebenbedingung erhalten wir $h = \frac{1}{\pi r^2}$.

Zielfunktion: $O(r) = 2\pi r \cdot \frac{1}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = 2\frac{1}{r} + 2\pi r^2$.
Ableitung: $O'(r) = -\frac{2}{r^2} + 4\pi r$.

$$\begin{aligned} 4\pi r &= \frac{2}{r^2} && \mid \cdot r^2 \cdot \frac{1}{4\pi} \text{ mit } r \neq 0 \\ r^3 &= \frac{1}{2\pi} && \mid \sqrt[3]{\cdot} \\ r &= \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \approx 0.542 \end{aligned}$$

Daraus folgt $h = 2r \approx 1.084$ und $O(r) \approx 5.536$.

Lösung zu Aufgabe 20.9 ex-abstand-punkt-parabel
Sei $(x, f(x))$ ein Punkt auf der Kurve. Der Abstand vom Ursprung ist damit
$A(x) = \sqrt{x^2 + (f(x))^2}$
Von dieser Funktion suchen wir das Minimum. Wir können anstelle von $A(x)$ auch $B(x) = (A(x))^2$ betrachten.
Vorgehen: Extremalstellen bestimmen durch Lösen der Gleichung $B'(x) = 0$. Dann mit $B''(x)$ die Art der Extrema bestimmen und dann das absolute Minimum bestimmen.

a) $B(x) = x^2 + \left(\frac{1}{2}(x+2)^2 + 1\right)^2$
$B'(x) = 0$ liefert $x \approx -1.1523$. Eingesetzt in $B''(x)$ ergibt sich ungefähr 6.156, wir haben also ein Minimum gefunden.
Der effektive Abstand ist also $\sqrt{B(x)} \approx 1.782$.

b) $B'(x) = 0$ liefert $x \approx 0.356$, mit $B''(x) \approx 3.311$ und $A(x) \approx 1.160$.

c) $B'(x) = 0$ liefert für $x \approx \{-0.6730, 1.203, 2.470\}$ mit $B''(x) \approx \{23.59, -9.504, 15.92\}$. Wir haben also zwei lokale Minima. Wir werten also für den ersten und letzten Wert von x die Funktion $A(x)$ aus und erhalten $A(x) \approx \{0.7024, 2.609\}$, wovon das Minimum 0.7024 die gesuchte Distanz ist.

d) $B'(x) = 0$ liefert $\{-0.8892, 0.6446, 1.745\}$ Die gesuchte Distanz ist ≈ 0.9451.

Lösung zu Aufgabe 20.10 ex-extremalaufgaben-repetitorium

a) b : Breite des Quaders, a : Länge, c : Höhe (jeweils in cm). Volumen des Quaders $V = abc$ (in cm^3).
Nebenbedingungen: $a = 4b$ und $4a + 4b + 4c = 180$ (in cm) $\Rightarrow c = 45–5b$
Zielfunktion: $V(b) = 4b \cdot b \cdot (45–5b) = 180b^2–20b^3$ (in cm^3).
Extremum: $V'(b) = 0 \Rightarrow b = 6$ (Kontrolle, ob Maximum durch V')
Die Kanten müssen $a = 24$ cm, $b = 6$ cm, $c = 15$ cm gewählt werden. Das maximale Volumen beträgt dann 2160 cm^3.

b) x : Höhe des Parallelogramms, r : Länge
Fläche des Parallelogramms $A = x \cdot r$
Nebenbedingung: ganzes Dreieck und Restdreieck über dem Parallelogramm sind ähnlich Es gilt daher:
$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 7 - x}{r} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{7} \Rightarrow r = \frac{1}{3}\left(21 - 2\sqrt{3}x\right)$.
Zielfunktion: $A(x) = \frac{1}{3}x\left(21 - 2\sqrt{3}x\right)$.
Extremum: $A'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{7\sqrt{3}}{4}$ (Kontrolle, ob Maximum durch A'')
Das Parallelogramm hat die Länge $r = \frac{7}{2}$ cm, die Höhe $h = \frac{7\sqrt{3}}{4}$ cm und die maximale Fläche $A = \frac{49\sqrt{3}}{8}$ cm^2.

c) r : Stelle in $[0, \pi]$, so dass der Punkt $(r, 0)$ die linke untere Ecke des Rechtecks ist.
Umfang des Rechtecks $U = 2a + 2b$
Nebenbedingungen: $a = (\pi–2r$ und $b = 3\sin(r)$.
Zielfunktion: $U(r) = 2 \cdot 3\sin(r) + 2(\pi–2r) = 6\sin(r) + 2\pi–4r$.
Extremum: $U'(x) = 6\cos(r)–4 = 0 \Rightarrow u \approx 0.841$ Das Rechteck hat die linke untere Ecke $\approx (0.841, 0)$ und den maximalen Umfang von ≈ 7.391.

d) Gesuchter Punkt auf der Parabel: $Q(x, y)$.
Entfernung von Q zu P: $d = \sqrt{(x-6)^2 + (y-0)^2}$.
Nebenbedingung: $y = \frac{1}{2}x^2$, weil Q auf der Parabel liegt.
Zielfunktion: $d(x) = \sqrt{(x-6)^2 + \left(\frac{1}{2}x^2\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}x^4 + x^2 - 12x + 36}$.
Der Einfachheit halber bestimmen wir das Maximum der Funktion $e(x) = (d(x))^2$.
Extremum: $e'(x) = 0 \Rightarrow x^3 + 2x–12 = 0 \Rightarrow x = 2$.
Der Punkt $Q(2, 2)$ hat von P den kleinsten Abstand, und zwar $d = \sqrt{20}$.

Lösung zu Aufgabe 20.11 ex-huellkurve-faden-bild

a)

b) $f_x(t) = -2 + 2t$, $f_y(t) = 1 - 2t$.

c) $g_x(t) = 2t$, $g_y(t) = -1 + 2t$.

d) $t = 0.125$, Funktionsgleichung $\ell(x) = -0.75 \cdot (x + 1.75) + 0.75$.

e) Funktionsgleichung einer Geraden durch zwei Punkte $P = (p_x, p_y)$ und $Q = (q_x, q_y)$:
Steigung $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{q_y - p_y}{q_x - p_x}$. Verschiebung der Ursprungsgeraden $y = m \cdot x$:

$$\ell(x) = m \cdot (x - p_x) + p_y = \frac{q_y - p_y}{q_x - p_x} \cdot (x - p_x) + p_y$$

f) $m = \frac{g_y(t) - f_y(t)}{g_x(t) - f_x(t)} = \frac{-2+4t}{2} = -1 + 2t$.

$$\begin{aligned} k_t(x) = (-1+2t) \cdot (x - (-2+2t)) + (1-2t) &= \\ (-1+2t) \cdot x - (2 - 6t + 4t^2) + 1 - 2t &= \\ (-1+2t) \cdot x - 4t^2 + 4t - 1 &= \\ (-1+2t) \cdot x - (4t^2 - 4t + 1) &= \\ &(-1+2t) \cdot x - (-1+2t)^2 \end{aligned}$$

g) y-Wert: $y(t) = k_t(1) = (-1+2t) \cdot 1 - (-1+2t)^2 = -1 + 2t - 1 + 4t - 4t^2 = -2 + 6t - 4t^2$.
Wir suchen jenes t, für welches obiger Ausdruck möglichst gross wird. Dazu leiten wir nach t ab: $y'(t) = 6 - 8t$. Bei der Extremalstelle ist $y'(t) = 0$, also $t = \frac{3}{4}$. Eingesetzt in $y(t) = k_t(1)$ erhält man
$-2 + 6 \cdot \frac{3}{4} - 4 \cdot \frac{9}{16} = \frac{-8+18-9}{4} = \frac{1}{4}$.
Somit liegt der Punkt $(1, 0.25)$ auf der Hüllkurve.

h) Wir wiederholen obige Schritte, jetzt aber für allgemeines x_p anstatt für 1.
$y(t) = k_t(x_p) = (-1+2t) \cdot x_p - (-1+2t)^2$
Wir leiten wiederum nach t ab, wobei hier x_p nicht von t abhängt und einfach eine Zahl ist.
$y'(t) = 2x_p - 2(-1+2t) \cdot 2$.
Null setzen: $y'(t) = 0 \Leftrightarrow x_p = -2+4t \Leftrightarrow t = \frac{x_p+2}{4}$
Den optimalen t-Wert einsetzen:

$$y(t) = y\left(\frac{x_p+2}{4}\right) =$$
$$\left(-1+2\cdot\frac{x_p+2}{4}\right)\cdot x_p - \left(-1+2\cdot\frac{x_p+2}{4}\right)^2 =$$
$$\left(-1+\frac{x_p+2}{2}\right)\cdot x_p - \left(-1+\frac{x_p+2}{2}\right)^2 =$$
$$\left(-1+\frac{x_p}{2}+1\right)\cdot x_p - \left(-1+\frac{x_p}{2}+1\right)^2 =$$
$$\frac{x_p^2}{2} - \left(\frac{x_p}{2}\right)^2 =$$
$$\frac{1}{4}x_p^2$$

Damit entspricht die Hüllkurve dem Funktionsgraphen von $h(x) = \frac{1}{4}x^2$, also einer Parabel.

i) Verlängert man die «Fadengeraden» durch weitere Punkte entsteht die ganze Parabel.