1 Zahlenmengen

Ein Alleinstellungsmerkmal der Mathematik ist, dass man nichts glauben muss, sondern alle mathematischen Sachverhalte bewiesen werden können (und als Mathematiker müssen!), bis auf ganz wenige Grundannahmen, die sogenannten Axiome.

Fast die gesamte moderne Mathematik kann auf 10 Axiome der Mengenlehre zurückgeführt werden. Siehe z.B. https://de.wikipedia.org/wiki/Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre.

Damit die Zahlen zu definieren ist zwar sehr spannend, aber formell etwas zu anspruchsvoll. Auch die 5 *Peano-Axiome*, die die natürlichen Zahlen definieren sind für unsere Zwecke zu formell und wenig intuitiv. Siehe z.B. https://de.wikipedia.org/wiki/Peano-Axiome.

Wir werden deshalb die Zahlen geometrisch auf einem Zahlenstrahl definieren.

1.1 Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$

Die Zahlen 1, 2, 3, ... sind natürlich in dem Sinne, dass (fast) jeder Mensch lernt zu zählen. Auch die grundlegenden Operationen wie Addition und Multiplikation sind für kleine Zahlen intuitiv erfassbar (z.B. durch Zählen und Rechnen mit den Fingern) und werden mit dem Gebrauch einleuchtend. Niemand zweifelt daran, dass die Rechengesetze, die wir mit kleinen natürlichen Zahlen intuitiv als universal gültig erfahren, auch für beliebig grosse natürliche Zahlen gültig sind.

1.1.1 Permanenzprinzip

Das **Permanenzprinzip** ist die Forderung, dass die gewohnten Rechengesetze ihre Gültigkeit bewahren, wenn der Zahlenbereich ausgedehnt wird auf negative Zahlen, Bruchzahlen und reelle Zahlen. Und schliesslich auch die komplexen Zahlen, mit denen wir uns aber kaum beschäftigen werden.

1.1.2 Die Sache mit der Null

Die Zahl Null ist intuitiv viel schwieriger als Zahl zu erfassen, warum sollte «Nichts» eine Zahl sein? Die Null als Zahl zu begreifen kann zu Recht als eine der ersten Meisterleistungen in der Mathematik betrachtet werden. Erst die Null ermöglicht die Darstellung der Zahlen im Stellenwertsystem (normalerweise im Zehnersystem) und effizientes Rechnen.

Besonders in der Informatik wird normalerweise bei 0 begonnen zu zählen. D.h. das erste Element in einer Liste hat den Index 0. Das ist zwar auf den ersten Blick ungewöhnlich, vereinfacht aber vieles. In der Mathematik wird aber sehr oft noch bei 1 begonnen zu zählen, d.h. das erste Element einer Liste hat den Index 1. Auch die Menge der natürlichen Zahlen wird auf Stufe Mittelschule noch oft ohne die Null definiert, auf Stufe Universität aber fast ausschliesslich mit der Null.

Definition 1.1 Natürliche Zahlen, $\mathbb{N}$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$
Lies: «$\mathbb{N}$ ist die Menge mit den Elementen 0, 1, 2, 3, 4, u.s.w.».

1.1.3 Mengen und Elemente

Definition 1.2 Menge

Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von wohldefinierten **Elementen**. Für jedes mögliche Element kann unzweifelhaft festgestellt werden, ob es zur Menge gehört oder nicht.

Die Reihenfolge der Elemente in der Menge ist nicht relevant. Auch spielt es keine Rolle, wie oft ein Element in einer Menge vorkommt. Es geht alleine um die Zugehörigkeit.

Die Zugehörigkeit wird mit dem Zeichen «$\in$» notiert, z.B.

$7 \in \mathbb{N}$	$\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$
«7 ist Element von $\mathbb{N}$»	«Wurzel 2 ist nicht Element von $\mathbb{N}$»

Beispiele für Mengen sind:

Aufzählende Form	Beschreibende Form
$\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ «Die Menge mit den Elementen 0, 2, 4, 6, u.s.w.»	$\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist gerade.}\}$ «Die Menge aller x in $\mathbb{N}$ für die gilt: x ist gerade.»
$\{0, 1, 4, 9, 16, \ldots\}$ «Die Menge mit den Elementen 0, 1, 4, 9, 16, u.s.w.»	$\{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ «Die Menge aller n^2 für die gilt n ist natürlich.
$\{10, 11, 12, \ldots, 18, 19\}$ «Die Menge mit den Elementen 10,11,12, usw. bis 18, 19.»	$\{k \in \mathbb{N} \mid 10 \leq k \leq 19\}$ «Die Menge aller natürlichen k für die gilt 10 ist kleiner gleich k und k ist kleiner gleich 19.»

Keine Mengen sind:

Die Menge aller Frauen	Der Term «Frau» ist nicht wohldefiniert (Alter, Chromosomenausstattung, etc.)
Die Menge aller Schönwettertage im Juli 2021	«Schön Wetter» ist nicht wohldefiniert. (Pilzsammler vs. Gleitschirmpiloten).

Wir beschränken uns also auf Mengen von mathematisch definierten Elementen, typischerweise Zahlen oder geometrische Objekte wie Punkte.

Aufgabe 1.1 Schreiben Sie folgende Mengen in aufzählender und beschreibender Form:

a) Die Menge der Primzahlen.

b) Die Menge der Vielfachen von 37.

c) Die Menge der Kubikzahlen kleiner als 1111.

d) Die Menge der Zweierpotenzen.

1.2 Operationen in $\mathbb{N}$

Die Grundoperationen in $\mathbb{N}$ können auf dem Zahlenstrahl definiert werden.
Ein Zahlenstrahl kann wie folgt konstruiert werden: Auf einer Geraden werden zwei unterschiedliche Punkte 0 und 1 markiert (typischerweise die 1 rechts von der 0). Dann wird die Strecke von 0 zu 1 wiederholt nach rechts abgetragen:

1.2.1 Addition

Um zwei natürliche Zahlen a und b auf dem Zahlenstrahl zu addieren, wird die Strecke von 0 zu a bei b nach rechts abgetragen um $c = a + b$ zu erhalten.
Damit sind folgende wichtige Eigenschaften einleuchtend:

- $a + b \in \mathbb{N}$ wenn $a, b \in \mathbb{N}$ (Abgeschlossenheit).
- $a + b = b + a$ (Kommutativgesetz).
- $(a + b) + c = a + (b + c)$ (Assoziativgesetz).

1.2.2 Multiplikation

Die Multiplikation zweier natürlichen Zahlen a, b kann als wiederholte Addition aufgefasst werden, d.h.

$$a \cdot b = \underbrace{b + b + \ldots + b}_{\text{Anzahl Summanden: } a}$$

Die Abgeschlossenheit folgt direkt aus der Abgeschlossenheit der Addition.

Aufgabe 1.2

a) Finden Sie überzeugende Argumente für das Kommutativgesetz der Multiplikation, d.h. dafür, dass $a \cdot b = b \cdot a$ für **alle** natürlichen Zahlen. *Nur weil es für das Einmaleins stimmt, heisst noch nicht, dass es für grosse Zahlen nicht einmal Ausnahmen geben könnte!*

b) Gleiche Aufgabe für $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Aufgabe 1.3 An einem Gegenbeispiel soll hier gezeigt werden, dass es kommutative Operationen gibt, die aber nicht assoziativ sind.

Dazu betrachten wir das Spiel «Schere, Stein, Papier», oder auf Englisch «rock, paper, scissors». Sei $M = \{r, p, s\}$ die Menge der drei Symbole für rock, paper, scissors.

Man definiert die Operation $*$ so, dass das Resultat der «Sieger» der beiden Symbole ist, z.B. $r * p = p$, weil paper rock schlägt. Weiter definieren wir $x * x = x$ für $x \in M$ im Falle eines Unentschiedens.

Ist die Operation kommutativ? Ist sie assoziativ?

1.3 Subtraktion und ganze Zahlen $\mathbb{Z}$

Das Resultat der Subtraktion $a - b$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ ist nur dann wieder eine natürliche Zahl, wenn $a \geq b$. Auf dem Zahlenstrahl wird der Abstand von 0 zu b bei a *nach links* abgetragen, um zum Resultat zu kommen.

Damit die Subtraktion immer ausgeführt werden kann, müssen die natürlichen Zahlen um die negativen Zahlen erweitert werden.

Definition 1.3 Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

Die **Menge der ganzen Zahlen** $\mathbb{Z}$ ist definiert als

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

1.3.1 Minuszeichen: 3 Arten

Das Minuszeichen hat **drei** verschiedene Bedeutungen:

Operationszeichen	für die Subtraktion	z.B. $8 - 3$
Vorzeichen	bei negativen Zahlen	z.B. -15
Bilden der Gegenzahl	(Spiegelung an 0)	z.B. $-(4 + 2)$

1.3.2 Multiplikation in $\mathbb{Z}$

Die Multiplikation $n \cdot z$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{Z}$, $z < 0$ ist geometrisch wohl definiert, es wird n mal die Strecke von 0 bis z nach links abgetragen, und es gilt $n \cdot z = \underbrace{z + z + \ldots + z}_{\text{Anzahl Summanden: } n}$.

Mit dieser Definition lässt sich aber $z \cdot n$ nicht ohne weiteres definieren; eine negative Anzahl Strecken ist schwierig zu handhaben. Das Permanenzprinzip verlangt aber, dass die Rechengesetze erhalten bleiben, und damit lässt sich $z \cdot n = n \cdot z$ definieren.

Wir halten fest: Das Produkt einer positiven Zahl und einer negativen Zahl ist selbst negativ.

Multiplikation mit -1

Mit der geometrischen Definition ist klar dass $n \cdot (-1) = -n$ für $n \in \mathbb{N}$. Ein Minuszeichen kann durch die Multiplikationen mit -1 ersetzt werden:

Vorzeichen	z.B. $-15 = (-1) \cdot 15$
Operationszeichen	$a - b = a + (-b) = a + (-1) \cdot b$
Bilden der Gegenzahl	z.B. $-(4+2) = (-1) \cdot (4+2)$

Merke Subtraktionen sind auch nur Additionen

Eine Subtraktion kann (und soll) als Addition der Gegenzahl aufgefasst werden.

Mit dieser Sichtweise kann von Summen und Summanden gesprochen werden, auch wenn Subtraktionen vorkommen.

Die Multiplikation in $\mathbb{Z}$ muss nun so definiert werden, dass die bekannten Rechengesetze erhalten bleiben.

Multiplikation von zwei negativen Zahlen

Wie ist nun aber das Produkt $(-a) \cdot (-b)$ zu definieren, wenn $a, b \in \mathbb{N}$? Notieren zu den folgenden Gleichheitszeichen die angewandten Gesetze!

$$(-a) \cdot (-b) = ((-1) \cdot a) \cdot ((-1) \cdot b) = (-1) \cdot (-1) \cdot a \cdot b$$

Es bleibt also nur noch eine sinnvolle Definition für $(-1) \cdot (-1)$ zu finden. Die Multiplikation mit -1 bildet die Gegenzahl. Das soll auch in ganz $\mathbb{Z}$ gültig sein. Damit muss $(-1) \cdot (-1) = 1$ sein. Es gilt also

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$$

oder salopp ausgedrückt: **«Minus mal Minus gibt Plus»**.

Für diesen Sachverhalt gibt es noch weitere intuitive Erklärungen. Z.B. könnte man die negative Anzahl Strecken als «in die andere Richtung abtragen» interpretieren.

Oder man stellt sich ein kurzes Video vor, in dem ein fahrendes Fahrzeug zu sehen ist. Je nach Richtung, in der es fährt, ist die Geschwindigkeit positiv oder negativ. Die Zeit läuft positiv, es sei denn, man schaut das Video rückwärts an. Weiter gilt:

$$\text{Strecke} = \text{Geschwindigkeit} \ \cdot \ \text{Zeit}$$

Fährt das Fahrzeug rückwärts (negative Geschwindigkeit) und man schaut das Video rückwärts (negative Zeit), legt das Fahrzeug eine positive Strecke zurück.

1.3.3 Ausmultiplizieren und Klammern auflösen

Merke Distributivgesetz

Es gilt das Distributivgesetz:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

D.h. man kann ausmultiplizieren.
Engl. distribute, *bzw. frz.* distribuer *heisst «verteilen».*

Aufgabe 1.4 «Beweisen» Sie das Distributivgesetz für natürliche Zahlen.

Damit können wir Klammern auflösen:

Merke Klammern auflösen

$$a + (b + c - d) = a + b + c - d \qquad a - (b + c - d) = a - b - c + d$$

Folgt eine Klammer auf ein + (Pluszeichen), darf diese weggelassen werden.
Folgt eine Klammer auf ein − (Minuszeichen), darf diese weggelassen werden, wenn alle + und − in der Klammer vertauscht werden.

Aufgabe 1.5 Beweisen Sie die Regel zum Klammernauflösen für $a - (b + c - d)$.
Benutzen Sie dazu die Ersetzung des Minuszeichens durch die Multiplikation mit -1 und das Distributivgesetz (Ausmultiplizieren).

1.4 Potenzen mit natürlichen Exponenten

Definition 1.4

$b^e = \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{e \text{ Faktoren}}$ für $b \in \mathbb{N}$ und $e \in \mathbb{N}^+$

Potenzen mit natürlichen Exponenten können als wiederholte Multiplikation aufgefasst werden (so wie die Multiplikation als wiederholte Addition aufgefasst werden kann).

Man nennt b **Basis**, e **Exponent**, b^e eine **Potenz** und den Rechenvorgang nennt man **potenzieren**.

1.4.1 Rechenregeln

Potenzen haben eine noch höhere Priorität als Punkt-Operationen (Multiplikation, Division). Z.B.

$$3 \cdot 3^2 = 3 \cdot (3^2) = 3 \cdot 9 = 27 \quad \neq \quad (3 \cdot 3)^2 = 9^2 = 81$$

Bei Potenzen wird zuerst der Exponent berechnet, bevor potenziert wird. D.h.

$$3^{3^3} = 3^{(3^3)} = 3^{27} = 7\,625\,597\,484\,987 \quad \neq \quad (3^3)^3 = 27^3 = 19\,683$$

Potenzen haben auch Vorrang gegenüber der Gegenzahlbildung. Z.B.

$$-4^2 = -(4^2) = -16 \quad \neq \quad (-4)^2 = (-4) \cdot (-4) = 16$$

1.4.2 Potenzgesetze

Seien $a, b \in \mathbb{N}$ Basen und $e, f \in \mathbb{N}^+$ Exponenten. Es gelten folgende Potenzgesetze, die Sie von nun an beweisen können sollen:

$a^e \cdot a^f = a^{e+f}$

Beweis: $a^e \cdot a^f = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{Anzahl Faktoren: } e} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{Anzahl Faktoren: } f} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{Anzahl Faktoren: } e+f} = a^{e+f}$

$a^e \cdot b^e = (ab)^e$

Beweis: $a^e \cdot b^e = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{Anzahl Faktoren: } e} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{\text{Anzahl Faktoren: } e} = \underbrace{ab \cdot ab \cdot \ldots \cdot ab}_{\text{Anzahl Faktoren: } e} = (ab)^e$

$(a^e)^f = a^{e \cdot f}$

Beweis: $\underbrace{a^e \cdot a^e \cdot \ldots \cdot a^e}_{\text{Anzahl Faktoren: } f} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{Anzahl Faktoren: } e \cdot f \text{ Faktoren}} = a^{e \cdot f}$

Für $e > f$ gilt: $\frac{a^e}{a^f} = a^{e-f}$

Beweis: $\frac{a^e}{a^f} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{\text{Anzahl Faktoren: } e}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{Anzahl Faktoren: } f}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{Anzahl Faktoren: } e-f} = a^{e-f}$

$\frac{a^e}{b^e} = \left(\frac{a}{b}\right)^e$

Beweis: $\frac{a^e}{b^e} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{\text{Anzahl Faktoren: } e}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{\text{Anzahl Faktoren: } e}} = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{\text{Anzahl Faktoren: } e} = \left(\frac{a}{b}\right)^e$

1.4.3 Hoch Null

Wie soll a^0 definiert werden (für $a \in \mathbb{N}^+$)? Die obigen Potenzgesetze sollen auch weiterhin gültig bleiben (Permanenzprinzip).

Aufgabe 1.6 Bestimmen Sie mit Hilfe des ersten Potenzgesetz oben, wie a^0 zu definieren ist.

Laut dem ersten Potenzgesetz ist $a^0 \cdot a = a^0 \cdot a^1 = a^{0+1} = a^1 = a$. Dividiert man die Gleichung $a^0 \cdot a = a$ auf beiden Seiten durch a, erhält man $a^0 = 1$.

Hinweis: 0^0 ist nicht eindeutig definierbar. In mehreren Fällen macht es aber aus praktischen und ästhetischen Gründen Sinn, $0^0 = 1$ zu definieren.

1.4.4 Potenzen zum Auswendig lernen

n^2 bis $n = 20$, n^3 bis $n = 5$, 3^e bis $e = 5$ und 2^e bis $e = 10$.

Aufgabe 1.7 Erstellen Sie eine Tabelle mit allen auswendig zu lernenden Potenzen.

1.5 Division und $\mathbb{Q}$

Die Division $z : n$ mit $z, n \in \mathbb{N}$ und $n > 0$ kann auf dem Zahlenstrahl sehr einfach definiert werden: Man teilt die Strecke von 0 bis z in n gleich grosse Strecken. Der erste Teilpunkt rechts von 0 entspricht dem **Quotienten** (Resultat der Division).
Ausser wenn n ein Teiler von z ist, ist der Quotient keine natürliche Zahl, sondern eine **rationale Zahl** (Bruchzahl).

Definition 1.5 Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

Die Menge der **rationalen Zahlen** ist definiert als

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{z}{n} \mid z \in \mathbb{Z} \text{ und } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n > 0 \right\}$$

In einem Bruch $\frac{z}{n}$ wird z der **Zähler** und n der **Nenner** genannt.

Für die Addition und Subtraktion kann die geometrische Definition auf dem Zahlenstrahl sehr einfach auf $\mathbb{Q}$ ausgedehnt werden. Algebraisch müssen Brüche aber erst gleichnamig (gleiche Nenner) gemacht werden, bevor addiert werden kann.
Die Definition der Multiplikation in $\mathbb{Q}$ lässt sich nicht ohne weiteres aus jener in $\mathbb{N}$ übertragen. Man zeigt erst in $\mathbb{N}$ dass $a \cdot (b : c) = (a \cdot b) : c$ und fordert mit dem Permanenzprinzip die Gültigkeit in $\mathbb{Q}$.

Merke Multiplikation in $\mathbb{Q}$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

«Bruch mal Bruch, wie macht's der Kenner? Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner».
Und unbedingt **vor dem Multiplizieren** auch übers Kreuz **kürzen**!

Aufgabe 1.8 Berechnen Sie:

a) $\frac{24}{35} \cdot \frac{63}{16}$ b) $\frac{14}{27} \cdot \frac{63}{49}$ c) $\frac{48}{121} \cdot \frac{77}{32}$ d) $\frac{169}{39} \cdot \frac{28}{91} \cdot \frac{27}{6}$

1.5.1 Übungsaufgaben zu Potenzgesetzen

Aufgabe 1.9 Zusammenfassen, kürzen:

a) $\left(-\frac{1}{2}d^2\right)\cdot\frac{1}{2}a^5d^4g^4\cdot\frac{12}{7}g$ b) $\left(-\frac{7}{9}h^3m^3n^5\right)\cdot\frac{2}{7}n^2\cdot\left(-\frac{15}{2}m\right)$ c) $\frac{13}{8}y^2\cdot\left(-\frac{1}{2}f^4m^4\right)\cdot\frac{24}{13}f^2m^2$

d) $\frac{2}{11}t^4z\cdot\left(-\frac{11}{7}gt^2z^2\right)\cdot\left(-\frac{7}{4}g^3t^4\right)$ e) $\left(-\frac{5}{8}c^4t^2x^2\right)\cdot\frac{1}{3}tx^4\cdot\left(-\frac{9}{5}ct^3\right)$ f) $\frac{7}{6}c\cdot\frac{5}{13}t^3\cdot\frac{12}{7}c^5t^2$

Aufgabe 1.10 Auspotenzieren:

a) $\left(\frac{5}{2}e^2s^5u\right)^3$ b) $\left(-\frac{5}{2}b^3d^3h^2\right)^4$ c) $\left(\frac{5}{2}cm^5y^4\right)^2$ d) $\left(-\frac{3}{2}d^5m^3p\right)^2$

e) $\left(-\frac{3}{2}dt^3w\right)^2$ f) $\left(-\frac{5}{2}a^3m^4s^5\right)^3$ g) $\left(\frac{5}{2}a^5b^2e\right)^4$ h) $\left(-\frac{3}{2}f^4h^3y\right)^2$

Aufgabe 1.11 Kürzen, Koeffizient vor den Bruch:

a) $\dfrac{-\frac{11}{2}b^3h^2n^5}{\frac{11}{7}bh^7n^4}$ b) $\dfrac{\frac{9}{2}d^7qt^8}{-\frac{9}{7}d^4q^2t^8}$ c) $\dfrac{\frac{5}{2}g^5m^7n^5}{\frac{5}{9}g^3m^8n^5}$

d) $\dfrac{\frac{7}{2}w^4x^6z}{\frac{7}{3}w^4x^8z}$ e) $\dfrac{-\frac{3}{2}bu^4w^6}{\frac{1}{3}bu^8w^2}$ f) $\dfrac{\frac{5}{2}b^3e^3s^7}{-\frac{5}{11}b^3e^2s}$

Aufgabe 1.12 Auspotenzieren:

a) $\left(-\frac{3}{2}\cdot\frac{p}{f^3km^2s^3}\right)^5$ b) $\left(-\frac{5}{2}\cdot\frac{m^3x^3}{su^4y^4}\right)^4$ c) $\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{m^5}{e^3n^4s^5u^3}\right)^5$

d) $\left(-\frac{3}{2}\cdot\frac{f^2}{k^2p^2q^4t^5}\right)^4$ e) $\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{g^4}{c^4fh^4y}\right)^4$ f) $\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{f^2}{c^5t^4u^4y^5}\right)^4$

Aufgabe 1.13 Ausmultiplizieren:

a) $\left(-\frac{7}{5}g+\frac{1}{3}p^2\right)\left(-\frac{5}{3}g-\frac{2}{3}p^2\right)$ b) $\left(-\frac{1}{2}a^2+\frac{9}{4}b\right)\left(\frac{7}{9}a^2-\frac{9}{11}b\right)$

c) $\left(-\frac{7}{3}h-\frac{2}{3}n^2\right)\left(\frac{4}{3}h-\frac{6}{11}n^2\right)$ d) $\left(-\frac{5}{12}m^2-\frac{11}{2}w^2\right)\left(-\frac{5}{8}m^2+\frac{3}{4}w^2\right)$

e) $\left(\frac{1}{3}t^2+\frac{1}{2}w\right)\left(-\frac{5}{6}t^2+\frac{4}{5}w\right)$ f) $\left(-\frac{5}{9}s+\frac{8}{7}u\right)\left(-\frac{7}{4}s+\frac{1}{5}u\right)$

Aufgabe 1.14 Ausmultiplizieren:

a) $\left(\frac{5}{4}n^2w+\frac{11}{4n^2w^4}\right)\left(-\frac{6}{11}n^2w-\frac{12}{5n^2w^4}\right)$ b) $\left(\frac{f^3}{2w^2}+\frac{5w^3}{11f^3}\right)\left(-\frac{9f^3}{8w^2}+\frac{5w^3}{4f^3}\right)$

c) $\left(\frac{9a^2}{4w}+\frac{5}{4}w\right)\left(-\frac{3a^2}{2w}-\frac{9}{2}w\right)$ d) $\left(\frac{5}{7}p^3t-\frac{1}{2p^3t^2}\right)\left(-\frac{3}{5}p^3t-\frac{7}{3p^3t^2}\right)$

Aufgabe 1.15 Klammern Sie den Faktor mit kleinstmöglichem Nenner aus, so dass in der Klammer keine Brüche mehr vorkommen und keine gemeinsamen Faktoren.

a) $-\frac{5}{4}c^3k^2+\frac{3}{4ck^2}$ b) $-\frac{3}{8}gx^2+\frac{5x^3}{4g^3}$ c) $-\frac{10}{3}bk^2-\frac{4k^3}{7b^3}$ d) $-\frac{5}{7}mp^2+\frac{4m}{5p^2}$

e) $\frac{2q^3}{5k}+\frac{9}{10k^2q^3}$ f) $\frac{q^3}{2m}+\frac{7q}{5m^3}$ g) $-\frac{7e^3}{2s^2}-\frac{1}{2}e^2s^3$ h) $\frac{4y^3}{5b}-\frac{3y}{5b}$

1.5.2 Dividieren ist Multiplizieren mit dem Kehrwert

Seien $a, b \in Q$ zwei Bruchzahlen mit $b \neq 0$ und mit $b = \frac{z}{n}$ mit $z \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Welcher Bruchzahl r entspricht die Division $a : b$? Dazu formen wir folgende Gleichung um:

$$
\begin{aligned}
r &= a : b && | \cdot b \\
r \cdot b &= a && |\text{TU} \\
r \cdot \frac{z}{n} &= a && |\text{TU} \\
(r \cdot z) : n &= a && | \cdot n \\
r \cdot z &= a \cdot n && | : z \\
r &= (a \cdot n) : z = a \cdot (n : z) = a \cdot \frac{n}{z}
\end{aligned}
$$

Womit wir gezeigt haben, dass Dividieren durch $\frac{z}{n}$ das Gleiche ergibt, wie Multiplizieren mit dem **Kehrwert** $\frac{n}{z}$. Setzt man für $a = 1$ ein, hat man auch noch bewiesen, dass $1 : b = \frac{1}{b}$ der Kehrwert von b ist.

Merke Kehrwert

Der **Kehrwert** einer Zahl q ist $\frac{1}{q}$.
Ist q als Bruch $\frac{z}{n}$ geschrieben, ist der Kehrwert $\frac{1}{q} = \frac{n}{z}$.
Anstatt durch q zu dividieren, kann mit dem Kehrwert $\frac{1}{q}$ multipliziert werden.
Wird eine Zahl mit Ihrem eigenen Kehrwert multipliziert, erhält man 1.

Aufgabe 1.16

a) $\dfrac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{\frac{2}{3}}{4}} = \frac{17}{8}$

b) $\dfrac{2 - \frac{4}{3}}{\frac{2}{\frac{3}{4}} + 2} - \dfrac{2}{3} = -\frac{11}{21}$

c) $\dfrac{\frac{8^2+6^2+5^2}{2\cdot(2^5-3^3)^2}}{\left(\frac{5}{4}\right)^3} = \frac{32}{25}$

d) $-2 - \dfrac{-2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2}{-\frac{2}{-\frac{-3}{-2}}} = -\frac{1}{6}$

e) $1 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}} = \frac{8}{5}$

f) $\dfrac{\left(\frac{117}{127}\right)^4}{\frac{117^3}{127^5}} \cdot \dfrac{\frac{1}{117}}{127} = 1$

Aufgabe 1.17 Berechnen Sie im Kopf, aber vereinfachen Sie zuerst mit den Potenzgesetzen!

Beispiel: $\dfrac{\frac{20^6}{2^8}}{5^5} = \dfrac{\left(2^2\cdot 5\right)^6}{2^8} \cdot \dfrac{1}{5^5} = \dfrac{\left(2^2\right)^6\cdot 5^6}{2^8\cdot 5^5} = \dfrac{2^{12}}{2^8} \cdot \dfrac{5^6}{5^5} = 2^4 \cdot 5 = 2^3 \cdot 2 \cdot 5 = 8 \cdot 10 = 80$

a) $\dfrac{\frac{100^4}{2^7}}{25^3}$

b) $\dfrac{16^5}{8^6}$

c) $\dfrac{3^{3^2}}{(3^3)^2}$

1.6 Wie viele Zahlen gibt es?

Es ist klar, dass es unendlich viele natürliche Zahlen gibt. Es scheint auch klar, dass es irgendwie mehr ganze Zahlen und noch viel mehr Bruchzahlen zu geben scheint.
Leider versagt unsere Intuition gründlichst, wenn es um den Begriff der Unendlichkeit geht.

1.6.1 Abzählbarkeit

Eine (unendliche) Menge M ist abzählbar, wenn man alle Elemente komplett durchnummerieren kann. Mit anderen Worten, M hat in diesem Sinne «gleich viele» Elemente wie $\mathbb{N}$. In der Mathematik spricht man von **Mächtigkeit** und sagt, M und $\mathbb{N}$ sind **gleich mächtig**.

$\mathbb{Z}$ ist abzählbar:

-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
9	**7**	**5**	**3**	**1**	**0**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**

In diesem Sinne hat $\mathbb{Z}$ gleich viele Elemente wie $\mathbb{N}$, oder korrekter: $\mathbb{Z}$ ist gleich mächtig wie $\mathbb{N}$.

$\mathbb{Q}$ ist abzählbar:

$\frac{-5}{5}$	$\frac{-4}{5}$	$\frac{-3}{5}$	$\frac{-2}{5}$	$\frac{-1}{5}$	$\frac{0}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$
$\frac{-5}{4}$	$\frac{-4}{4}$	$\frac{-3}{4}$	$\frac{-2}{4}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{0}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$
$\frac{-5}{3}$	$\frac{-4}{3}$	$\frac{-3}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{0}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$
$\frac{-5}{2}$	$\frac{-4}{2}$	$\frac{-3}{2}$	$\frac{-2}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$
$\frac{-5}{1}$	$\frac{-4}{1}$	$\frac{-3}{1}$	$\frac{-2}{1}$	$\frac{-1}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$

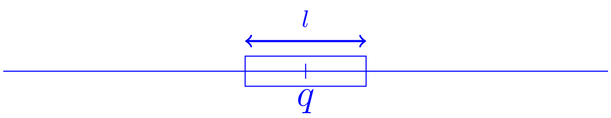
Damit ist auch $\mathbb{Q}$ gleich mächtig wie $\mathbb{N}$.

1.6.2 $\mathbb{Q}$ ist löchrig wie Schweizer Käse

Aufgabe 1.18 Berechnen Sie das Resultat folgender Summe als Dezimalbruch, wenn man a) nur die ersten drei Summanden, b) nur die ersten 6 Summanden und c) nur die ersten zehn Summanden addiert. Und d) was erhält man, wenn man alle (unendlich viele) Summanden addiert?

$$\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10'000}+\dots$$

Gedankenexperiment
Stellen Sie sich vor, Sie hätten einen Tipp-Ex-Roller. Mit diesem Roller wird auf der Zahlengeraden eine Zahl $q \in \mathbb{Q}$ (also ein Punkt) mit einem kleinen Streifen Tipp-Ex einer gewissen Länge $l \in \mathbb{Q}$ übermalt:



✎
Die rationalen Zahlen (Bruchzahlen) sind abzählbar, d.h. man kann sie durchnummerieren. Die erste Bruchzahl in dieser Nummerierung wird mit einem Streifen der Länge $\frac{3}{10}$ übermalt, die zweite mit einem Streifen der Länge $\frac{3}{100}$, die dritte mit $\frac{3}{1000}$ und so weiter.
Frage 1 Wie lange ist der Streifen für die n-te Bruchzahl?
Frage 2 Wie viel «Gesamtlänge Tipp-Ex» braucht man so, um *alle* Bruchzahlen zu übermalen?
Frage 3 Kann das sein? Haben Sie eine Vermutung, wo das «Problem» liegen könnte?
✎ Entweder ist es möglich, mit einer endlich viel Tipp-Ex eine unendliche Strecke abzudecken, oder viele Punkte auf der Zahlengeraden sind nicht überstrichen worden und stellen somit keine rationale Zahl dar.

1.6.3 $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$\sqrt{2}$ ist jene Zahl, die quadriert 2 ergibt.
Schon die Pythagoräer wussten, dass nicht alles als Verhältnis von ganzen Zahlen beschrieben werden kann, wie z.B. die Länge der Diagonale des Einheitsquadrates.

Aufgabe 1.19 Berechnen Sie die Länge der Diagonalen in einem Quadrat mit der Seitenlänge 1.

Der folgende Beweis geht zurück auf den griechischen Mathematiker Euklid von Alexandria (ca. 300 v.Chr.).

Beweis: Zu zeigen ist, dass $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Um das zu beweisen, werden wir (fälschlicherweise) zuerst das Gegenteil annehmen, nämlich dass $\sqrt{2} = \frac{z}{n} \in \mathbb{Q}$. Wir werden zeigen, dass sich damit ein Widerspruch konstruieren lässt und damit unsere Annahme falsch sein muss.

Wir können natürlich annehmen, dass $\frac{z}{n}$ vollständig gekürzt ist. (Sollte das nicht so sein, kürzen wir vollständig und nehmen dann den gekürzten Bruch.) Verwenden wir die Definition von $\sqrt{2}$: ✎

$$2 = \left(\frac{z}{n}\right)^2 = \frac{z^2}{n^2} \qquad | \cdot n^2$$

$$2n^2 = z^2$$

Daraus folgt sofort, dass z^2 eine gerade Zahl sein muss. z^2 ist nur dann gerade, wenn z selbst schon gerade ist. Damit kann $z = 2 \cdot t$ geschrieben werden. Wir setzen ein:

$$2n^2 = (2 \cdot t)^2 = 2^2 \cdot t^2 = 4t^2 \qquad | : 2$$

$$n^2 = 2t^2$$

Daraus folgt sofort, dass n^2 gerade ist, und damit ist auch n gerade. Das heisst, der Bruch $\frac{z}{n}$ kann mit 2 gekürzt werden. Das ist aber ein Widerspruch zur Annahme, dass $\frac{z}{n}$ vollständig gekürzt war. Also kann $\sqrt{2}$ nicht als Bruch dargestellt werden.

1.7 Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Auf der Zahlengeraden entspricht $\mathbb{R}$ der Menge *aller Punkte*. Dargestellt werden reelle Zahlen meistens als Dezimalbrüche, z.B. $\pi = 3.141592653589793\ldots$. Oder aber als ganze Zahlen, Brüche oder Symbole, wie z.B. $\sqrt{2}$.

Die Zahlenmengen können wie folgt dargestellt werden:

1.7.1 Dezimalbrüche

Wir unterscheiden 3 Arten von Dezimalbrüchen:

Abbrechende Dezimalbrüche, wie z.B. 2.25. Abbrechende Dezimalbrüche sind immer rational, d.h. Elemente von $\mathbb{Q}$.

Periodische, nicht-abbrechende Dezimalbrüche, wie z.B. $0.33333\ldots = 0.\overline{3}$ oder $74.4213131313\ldots = 74.42\overline{13}$. Auch diese Dezimalbrüche sind immer rational.

Nicht-periodische, nicht-abbrechende Dezimalbrüche, wie z.B. $1.4142135623730951\ldots$ oder $0.1010010001000010000001\ldots$ oder $1.2345678910111213141516\ldots$. Diese Dezimalbrüche sind **irrational**, d.h. nicht Element von $\mathbb{Q}$.

1.7.2 Nicht-Abzählbarkeit von $\mathbb{R}$

Das $\mathbb{R}$, bzw. die Menge aller Punkte auf der Zahlengeraden nicht abzählbar sein kann, haben wir schon beim Gedankenexperiment mit dem überstreichen aller rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ gesehen. Man kann aber auch direkt zeigen, dass $\mathbb{R}$ nicht abzählbar sein kann, indem man, wieder durch Widerspruch, das Gegenteil annimmt.

Sei r_1, r_2, etc. eine vollständige, durchnummerierte Liste aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1. Diese können alle als Dezimalbrüche geschrieben werden, die mit 0. beginnen und unendlich viele Nachkommastellen haben (die aber auch alle Null sein können):

r_1	0.	3	6	4	2	4	3	5	...
r_2	0.	7	1	2	3	1	4	9	...
r_3	0.	8	9	9	1	2	5	6	...
r_4	0.	2	0	7	1	3	6	3	...
r_5	0.	1	0	5	4	2	7	1	...
r_6	0.	2	5	4	8	1	8	2	...
r_7	0.	2	6	8	9	1	2	4	...

Aus dieser Tabelle bildet man eine neue Zahl entlang der Diagonalen, indem man alle Ziffern ausser der Eins durch eine Eins ersetzt, und die Einsen durch eine Null. Im Beispiel hier erhält man die Zahl $0.1010111\ldots$. Begründen Sie, warum diese Zahl *nicht* in der Liste vorkommt.

D.h. es kann keine vollständige Liste geben. Damit ist $\mathbb{R}$ mächtiger als $\mathbb{N}$.

Die saubere Definition der reellen Zahlen und Ausdehnung der bekannten Rechengesetze ist sehr anspruchsvoll und wurde erst 1871 von Georg Cantor das erste mal vollbracht. Der obige «Diagonalenbeweis» wurde, ebenfalls von Cantor, im Jahre 1891 publiziert. Wir feiern also erst das 150-Jahre-Jubiläum der mathematischen Fassbarkeit des gesamten Zahlenstrahls.

1.8 Primzahlen und Primfaktorzerlegung

Definition 1.6 Primzahl

Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl die *genau 2 Teiler* hat.

Aufgabe 1.20 Schreiben Sie alle Primzahlen bis 50 auf:

Definition 1.7 Primzahlzerlegung

Jede natürliche Zahl grösser gleich 2 kann in eindeutiger Weise als Produkt von Potenzen von Primzahlen geschrieben werden (Basen aufsteigend geordnet).

Dazu dividiert man nach und nach «offensichtliche» Faktoren aus. Z.B.

$$14\,400 = 100 \cdot 144 = 10^2 \cdot 12^2 = (2 \cdot 5)^2 \cdot (3 \cdot 4)^2 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 3^2 \cdot 2^4 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

Aufgabe 1.21 Bestimmen Sie Primfaktorzerlegung:

a) $294 \cdot 7500 \cdot 2300$ b) $441 \cdot 275000 \cdot 70000$ c) $315 \cdot 154000 \cdot 29000$ d) $525 \cdot 10500 \cdot 23000$

e) $84 \cdot 16500 \cdot 1900$ f) $1225 \cdot 23100 \cdot 29000$ g) $525 \cdot 1800 \cdot 19000$ h) $735 \cdot 6600 \cdot 170000$

1.9 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe 1.1 ex-zahlmengen-schreibweisen
Es gibt z.T. mehrere korrekte Möglichkeiten für die beschreibende Form.

a) $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots\}$
$\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist prim}\}$.

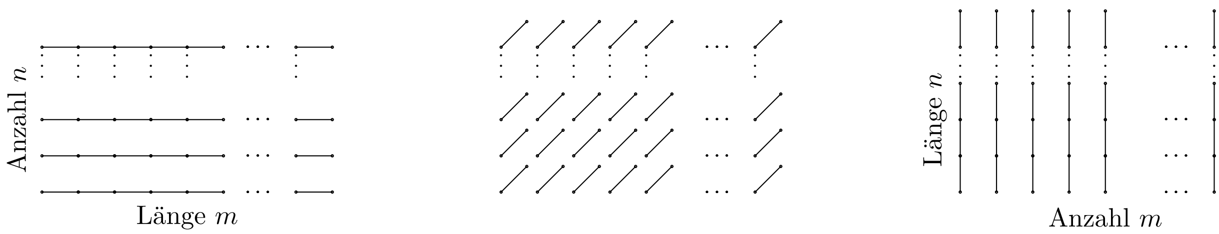
b) $\{37, 74, 111, 148, 185, \ldots, \}$
$\{37x \mid x \in \mathbb{N}\}$, oder
$\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist durch 37 teilbar}\}$, oder
$\{n \in \mathbb{N} \mid n = 37k, k \in \mathbb{N}\}$.

c) $\{0, 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000\}$
$\{a^3 \mid a^3 < 1111 \text{ und } a \in \mathbb{N}\}$, oder
$\{b \in N \mid b < 1111 \text{ und } b = c^3 \text{ mit } c \in \mathbb{N}\}$.

d) $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \ldots\}$
$\{2^z \mid z \in \mathbb{N}\}$, oder
$\{y \in \mathbb{N} \mid y = 2^x \text{ mit } x \in \mathbb{N}\}$.

Lösung zu Aufgabe 1.2 ex-kommutativ-multiplikation

a) Bleibt man bei der Definition vom Abtragen von Strecken kann die Kommutativität mit folgendem Bild «bewiesen» werden, wo man sich vorstellt, wie die Strecken der Länge 1 im Gegenuhrzeigersinn gedreht werden:



Man könnte aber auch einfach a mal b Punkte auf einem Gitter als Rechteck anordnen und so einsehen, dass man auf das gleiche Resultat kommt, ob man a mal b Punkte zusammen zählt oder b mal a Punkte zusammen zählt.

b) Betrachtet man Punkte auf einem 3-dimensionales Gitter, die einen Quader mit Seitenlängen (gemessen in Anzahl Punkten) a, b und c bilden, leuchtet auch das Assoziativgesetz ein.

Lösung zu Aufgabe 1.3 ex-kommutativ-aber-nicht-assoziativ
Die Kommutativität ergibt sich direkt aus den Spielregeln, es spielt keine Rolle ob man $x*y$ oder $y*x$ betrachtet, das Resultat (der Sieger) ist dasselbe.

Für die Assoziativität betrachtet man z.B.
$(r * p) * s = p * s = s$ (d.h. der Sieger von r gegen p spielt gegen s) und
$r * (p * s) = r * s = r$ (d.h. r spielt gegen den Sieger von p gegen s)
was nicht das gleiche ergibt. Also ist die Operation nicht assoziativ.

Lösung zu Aufgabe 1.4 ex-beweis-distributivgesetz

Zu zeigen ist, dass $a(b+c) = ab + ac$.

Dazu betrachtet man Punkte auf einem Gitter. Zuerst in einem Rechteck mit Länge $(b+c)$ und Höhe a. Die Anzahl Punkte entspricht $a(b+c)$.

Dann betrachtet man zwei Rechtecke nebeneinander mit Höhe a und den Längen b und c. Die Anzahl Punkte der beiden Rechtecke ist also $ab + ac$.

Die Anzahl Punkte total ist ein beiden Fällen gleich gross, weil die beiden Rechtecke zum grossen zusammengefügt werden können.

Lösung zu Aufgabe 1.5 ex-klammern-aufloesen-beweisen

M steht für Umwandlung von Minuszeichen in die Multiplikation mit -1 oder umgekehrt.
A steht für Ausmultiplizieren.
V steht für Vereinfachen/Ausrechnen.

$$a-(b+d-c) \overset{\text{M}}{\overset{\downarrow}{=}} a+(-1)\cdot(b+d-c) \overset{\text{A}}{\overset{\downarrow}{=}} a+(-1)\cdot b+(-1)\cdot d-(-1)\cdot c \overset{\text{M}}{\overset{\downarrow}{=}}$$
$$a-b-d+(-1)\cdot(-1)\cdot c \overset{\text{V}}{\overset{\downarrow}{=}} a-b-d+1\cdot c \overset{\text{V}}{\overset{\downarrow}{=}} a-b-d+c$$

Lösung zu Aufgabe 1.8 ex-bruchmultiplikation

a) $\frac{27}{10}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{21}{22}$ d) $\frac{3}{2}$

Lösung zu Aufgabe 1.9 ex-potenzen-mul-only

a) $-\frac{3}{7}a^5d^6g^5$ b) $\frac{5}{3}h^3m^4n^7$ c) $-\frac{3}{2}f^6m^6y^2$
d) $\frac{1}{2}g^4t^{10}z^3$ e) $\frac{3}{8}c^5t^6x^6$ f) $\frac{10}{13}c^6t^5$

Lösung zu Aufgabe 1.10 ex-monome-power

a) $\frac{125}{8}e^6s^{15}u^3$ b) $\frac{625}{16}b^{12}d^{12}h^8$ c) $\frac{25}{4}c^2m^{10}y^8$ d) $\frac{9}{4}d^{10}m^6p^2$
e) $\frac{9}{4}d^2t^6w^2$ f) $-\frac{125}{8}a^9m^{12}s^{15}$ g) $\frac{625}{16}a^{20}b^8e^4$ h) $\frac{9}{4}f^8h^6y^2$

Lösung zu Aufgabe 1.11 ex-monome-division

a) $-\frac{7}{2}\cdot\frac{b^2n}{h^5}$ b) $-\frac{7}{2}\cdot\frac{d^3}{q}$ c) $\frac{9}{2}\cdot\frac{g^2}{m}$
d) $\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2}$ e) $-\frac{9}{2}\cdot\frac{w^4}{u^4}$ f) $-\frac{11}{2}es^6$

Lösung zu Aufgabe 1.12 ex-monome-quotient-power

a) $-\frac{243}{32}\cdot\frac{p^5}{f^{15}k^5m^{10}s^{15}}$ b) $\frac{625}{16}\cdot\frac{m^{12}x^{12}}{s^4u^{16}y^{16}}$ c) $\frac{243}{32}\cdot\frac{m^{25}}{e^{15}n^{20}s^{25}u^{15}}$
d) $\frac{81}{16}\cdot\frac{f^8}{k^8p^8q^{16}t^{20}}$ e) $\frac{625}{16}\cdot\frac{g^{16}}{c^{16}f^4h^{16}y^4}$ f) $\frac{81}{16}\cdot\frac{f^8}{c^{20}t^{16}u^{16}y^{20}}$

Lösung zu Aufgabe 1.13 ex-ausmultiplizieren-einfach

a) $\frac{7}{3}g^2 - \frac{5}{9}gp^2 + \frac{14}{15}gp^2 - \frac{2}{9}p^4 = \frac{7}{3}g^2 + \frac{17}{45}gp^2 - \frac{2}{9}p^4$

b) $-\frac{7}{18}a^4 + \frac{9}{22}a^2b + \frac{7}{4}a^2b - \frac{81}{44}b^2 = -\frac{7}{18}a^4 + \frac{95}{44}a^2b - \frac{81}{44}b^2$

c) $-\frac{28}{9}h^2 - \frac{8}{9}hn^2 + \frac{14}{11}hn^2 + \frac{4}{11}n^4 = -\frac{28}{9}h^2 + \frac{38}{99}hn^2 + \frac{4}{11}n^4$

d) $\frac{25}{96}m^4 - \frac{5}{16}m^2w^2 + \frac{55}{16}m^2w^2 - \frac{33}{8}w^4 = \frac{25}{96}m^4 + \frac{25}{8}m^2w^2 - \frac{33}{8}w^4$

e) $-\frac{5}{18}t^4 - \frac{5}{12}t^2w + \frac{4}{15}t^2w + \frac{2}{5}w^2 = -\frac{5}{18}t^4 - \frac{3}{20}t^2w + \frac{2}{5}w^2$

f) $\frac{35}{36}s^2 - 2su - \frac{1}{9}su + \frac{8}{35}u^2 = \frac{35}{36}s^2 - \frac{19}{9}su + \frac{8}{35}u^2$

Lösung zu Aufgabe 1.14 ex-ausmultiplizieren-bruch-monome

a) $-\frac{15}{22}n^4w^2 - \frac{33}{5n^4w^8} - \frac{3}{w^3} - \frac{3}{2w^3} = -\frac{15}{22}n^4w^2 - \frac{33}{5n^4w^8} - \frac{9}{2w^3}$

b) $-\frac{9f^6}{16w^4} + \frac{25w^6}{44f^6} - \frac{45}{88}w + \frac{5}{8}w = -\frac{9f^6}{16w^4} + \frac{25w^6}{44f^6} + \frac{5}{44}w$

c) $-\frac{27a^4}{8w^2} - \frac{81}{8}a^2 - \frac{15}{8}a^2 - \frac{45}{8}w^2 = -\frac{27a^4}{8w^2} - 12a^2 - \frac{45}{8}w^2$

d) $-\frac{3}{7}p^6t^2 + \frac{7}{6p^6t^4} - \frac{5}{3t} + \frac{3}{10t} = -\frac{3}{7}p^6t^2 + \frac{7}{6p^6t^4} - \frac{41}{30t}$

Lösung zu Aufgabe 1.15 ex-ausklammern-nennerfrei

a) $\frac{1}{4ck^2} \cdot \left(3 - 5c^4k^4\right)$ b) $\frac{x^2}{8g^3} \cdot \left(-3g^4 + 10x\right)$ c) $\frac{2k^2}{21b^3} \cdot \left(-35b^4 - 6k\right)$ d) $\frac{m}{35p^2} \cdot \left(28 - 25p^4\right)$

e) $\frac{1}{10k^2q^3} \cdot \left(9 + 4kq^6\right)$ f) $\frac{q}{10m^3} \cdot \left(14 + 5m^2q^2\right)$ g) $\frac{e^2}{2s^2} \cdot \left(-7e - s^5\right)$ h) $\frac{y}{5b} \cdot \left(-3 + 4y^2\right)$

Lösung zu Aufgabe 1.16 ex-doppelbrueche

a) $\frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{\frac{2}{3}}{4}} = \frac{\frac{8}{12} + \frac{9}{12}}{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{\frac{17}{12}}{\frac{1}{2} + \frac{2}{12}} = \frac{\frac{17}{12}}{\frac{6}{12} + \frac{2}{12}} = \frac{\frac{17}{12}}{\frac{8}{12}} = \frac{17}{\cancel{12}} \cdot \frac{\cancel{12}}{8} = \frac{17}{8}$

b) $\frac{2 - \frac{4}{3}}{\frac{2}{\frac{3}{4}} + 2} - \frac{2}{3} = \frac{\frac{6}{3} - \frac{4}{3}}{\frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} + 2} - \frac{2}{3} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{3} + \frac{6}{3}} - \frac{2}{3} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{14}{3}} - \frac{2}{3} = \frac{\cancel{2}^1}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{14}_7} - \frac{2}{3} = \frac{1}{7} - \frac{2}{3} =$
$\frac{3}{21} - \frac{14}{21} = -\frac{11}{21}$

c) $\frac{\frac{8^2+6^2+5^2}{2\cdot(2^5-3^3)^2}}{\left(\frac{5}{4}\right)^3} = \frac{\frac{64+36+25}{2\cdot(32-27)^2}}{\frac{5^3}{4^3}} = \frac{125}{2 \cdot (5)^2} \cdot \frac{4^3}{5^3} = \frac{\cancel{5^3}}{\cancel{2} \cdot 5^2} \cdot \frac{2^{\cancel{6}5}}{\cancel{5^3}} = \frac{32}{25}$

d) $-2 - \frac{-2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2}{-\frac{2}{-\frac{-3}{-2}}} = -2 - \frac{-2 - \frac{4}{9}}{-\frac{2}{-\frac{3}{2}}} = -2 - \frac{-2 - \frac{4}{9}}{-2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)} = -2 - \frac{-\frac{18}{9} - \frac{4}{9}}{\frac{4}{3}} = -2 - \left(-\frac{\cancel{22}^{11}}{\cancel{9}_3}\right) \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}_2} =$
$-2 - \left(-\frac{11}{6}\right) = -\frac{12}{6} + \frac{11}{6} = -\frac{1}{6}$

e) $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{3}{2}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} = 1 + \frac{1}{\frac{5}{3}} = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$

f) $\frac{\left(\frac{117}{127}\right)^4}{\frac{117^3}{127^5}} \cdot \frac{\frac{1}{117}}{127} = \frac{117^4}{127^4} \cdot \frac{127^5}{117^3} \cdot \frac{1}{117} \cdot \frac{1}{127} = \frac{117^4 \cdot 127^5}{127^4 \cdot 117^3 \cdot 117 \cdot 127} = \frac{117^4 \cdot 127^5}{127^5 \cdot 117^4} = 1$

Lösung zu Aufgabe 1.17 ex-potenzgesetze-brueche

a) $\frac{\left(2^2 \cdot 5^2\right)^4}{2^7} \cdot \frac{1}{\left(5^2\right)^3} = \frac{\left(2^2\right)^4 \cdot \left(5^2\right)^4}{2^7 \cdot 5^6} = \frac{2^8 \cdot 5^8}{2^7 \cdot 5^6} = 2 \cdot 5^2 = 2 \cdot 25 = 50$

b) $\frac{\left(2^4\right)^5}{\left(2^3\right)^6} = \frac{2^{20}}{2^{18}} = 2^2 = 4$

c) $\frac{3^9}{3^6} = 3^3 = 27$

Lösung zu Aufgabe 1.21 ex-primfaktorzerlegung

a) $294 \cdot 7500 \cdot 2300 = 2 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 10^2 \cdot 10^2 \cdot 23 = 2 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot (2 \cdot 5)^2 \cdot (2 \cdot 5)^2 \cdot 23 = 2 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot 2^2 \cdot 5^2 \cdot 23 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^6 \cdot 7^2 \cdot 23$

b) $441 \cdot 275000 \cdot 70000 = 3^2 \cdot 7^2 \cdot 5^2 \cdot 10^3 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 10^4 = 3^2 \cdot 7^2 \cdot 5^2 \cdot (2 \cdot 5)^3 \cdot 11 \cdot 7 \cdot (2 \cdot 5)^4 = 3^2 \cdot 7^2 \cdot 2^3 \cdot 5^5 \cdot 11 \cdot 2^4 \cdot 5^4 \cdot 7 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^9 \cdot 7^3 \cdot 11$

c) $315 \cdot 154000 \cdot 29000 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 10^3 \cdot 11 \cdot 10^3 \cdot 29 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 7 \cdot (2 \cdot 5)^3 \cdot 11 \cdot (2 \cdot 5)^3 \cdot 29 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2^4 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 2^3 \cdot 5^3 \cdot 29 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^7 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 29$

d) $525 \cdot 10500 \cdot 23000 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 10^2 \cdot 10^3 \cdot 23 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot (2 \cdot 5)^2 \cdot (2 \cdot 5)^3 \cdot 23 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 5^3 \cdot 23 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^8 \cdot 7^2 \cdot 23$

e) $84 \cdot 16500 \cdot 1900 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 10^2 \cdot 11 \cdot 10^2 \cdot 19 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 5)^2 \cdot 11 \cdot (2 \cdot 5)^2 \cdot 19 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 11 \cdot 2^2 \cdot 5^2 \cdot 19 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$

f) $1225 \cdot 23100 \cdot 29000 = 5^2 \cdot 7^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 10^2 \cdot 11 \cdot 10^3 \cdot 29 = 5^2 \cdot 7^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot (2 \cdot 5)^2 \cdot 11 \cdot (2 \cdot 5)^3 \cdot 29 = 5^2 \cdot 7^2 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 2^3 \cdot 5^3 \cdot 29 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^7 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 29$

g) $525 \cdot 1800 \cdot 19000 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 10^2 \cdot 10^3 \cdot 19 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot (2 \cdot 5)^2 \cdot (2 \cdot 5)^3 \cdot 19 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^3 \cdot 5^3 \cdot 19 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^7 \cdot 7 \cdot 19$

h) $735 \cdot 6600 \cdot 170000 = 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 10^2 \cdot 11 \cdot 10^4 \cdot 17 = 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 5)^2 \cdot 11 \cdot (2 \cdot 5)^4 \cdot 17 = 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 2^4 \cdot 5^4 \cdot 17 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^7 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 17$

2 Terme

Ein wichtiger Teil des mathematischen «Handwerks» besteht darin, Terme umzuformen. Dazu müssen einerseits die Rechengesetze der reellen Zahlen verinnerlicht sein, und andererseits muss auch «die Natur» komplizierter Terme sofort erfasst werden können. Ziel dieses Kapitels ist letztere Fähigkeit zu schulen.

Ein **Term** in der Mathematik lässt sich wie folgt definieren:

- Jede Zahl und jede Variable ist ein Term. Z.B. 42, oder a, oder β.
- Eine Verknüpfung von Termen ist ein Term. Verknüpfungen sind z.B. die Grund-Rechenoperationen, Klammern, Gegenzahlbildung, Potenzen, Beträge (und später auch Funktionen, wie z.B. $\sqrt{x}$).

Beispiele für Terme:

$$\frac{\alpha^{2+\gamma}}{x+2} \qquad x \qquad -a^2-(b^2-c^2)$$

Folgende Dinge sind keine Terme:

$$(a+b \qquad 4+a+ \qquad \frac{-5^+}{}$$

weil Klammern nicht geschlossen oder Operationszeichen keine Terme verbinden.

2.1 Gleichheit und Äquivalenz von Termen

Die Terme ab und ba sind zuerst einmal verschiedene Terme. Erst wenn man festlegt, worauf sich die Terme beziehen (in unserem Fall vorerst immer die reellen Zahlen $\mathbb{R}$), kann man sagen, dass für jede mögliche Ersetzung der Variablen durch reelle Zahlen (oder weitere Terme, die reelle Zahlen ergeben) die Terme äquivalent (gleichwertig) sind. Oder mit anderen Worten:

$$ab = ba \quad \Leftrightarrow \quad \text{Das Kommutativgesetz gilt für die Multiplikation.}$$

Es gibt durchaus mathematische Konstrukte der Multiplikation, die nicht kommutativ sind.

Der Einfachheit halber werden wir weiter von Gleichheit von ab und ba sprechen.

Merke Variablen stehen auch für Terme

Termumformungen sind auch dann gültig, wenn **Variablen durch Terme ersetzt** werden (und nicht nur durch Zahlen).

Das Potenzgesetz $(a\cdot b)^e = a^e \cdot b^e$ gilt nicht nur, wenn man für a, b und e Zahlen einsetzt, sondern auch wenn man z.B. für $a=(x-y^z)$ und $b=\frac{c}{d}$ einsetzt. Es heisst dann

$$\left((x-y^z)\cdot\frac{c}{d}\right)^e = (x-y^z)^e \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^e$$

Beachten Sie die Klammern um den Bruch!

Merke Schutzklammern

Ersetzt man Variablen durch Terme (typischerweise bei der Anwendung von Umformungsregeln), ist es oft nötig (und i.A. empfohlen!), um die Ersetzung Klammern zu setzen.

Beispiel: $ab=ba$, Ersetzung: $a=c+d$

korrekt: $(c+d)\cdot b = b\cdot(c+d)$ falsch: $c+d\cdot b \neq b\cdot c+d$

2.2 Ausdrücke: Notationen und Binärbäume

Wir unterscheiden 3 Darstellungsarten für Ausdrücke:

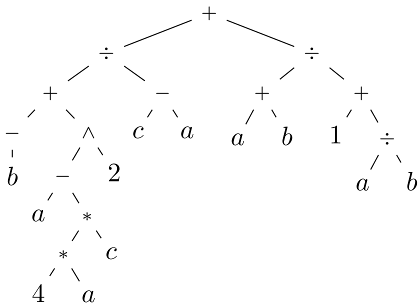
- Mathematische Notation (für die Darstellung auf Papier).
- Computer Notation (für die Eingabe auf Computern).
- Darstellung als Binärbaum (zur Veranschaulichung und computer-interne Darstellung).

Mathematische Notation: $\dfrac{-b+(a-4\cdot a\cdot c)^2}{c-a}+\dfrac{a+b}{1+\frac{a}{b}}$

Computer Notation: `(-b+(a-4*a*c)^2)/(c-a) + (a+b)/(1+a/b)`

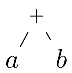
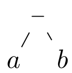
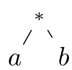
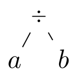
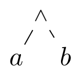
Die hier definierte Computer Notation ist in den meisten Programmiersprachen gebräuchlich, bis auf die Notation der Potenz. Wir benutzen hier die Notation mit dem «Circonflex», die in Tabellenkalkulationen (und z.B. in Basic-Dialekten) verwendet wird.

Als Binärbaum:

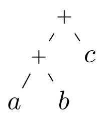
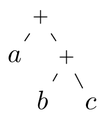


An der Wurzel des Baumes (zuoberst), steht immer die Operation, die zuletzt ausgeführt wird. Diese Operation bestimmt über das «Wesen» des Terms, d.h. ob der Term letzlich eine Summe, Produkt etc. ist. Ausgewertet wird ein Baum wie folgt: Zuerst der linke Unterbaum, dann der rechte Unterbaum, dann die Operation der Wurzel mit den Resultaten der beiden Unterbäumen.

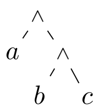
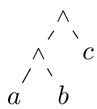
Beispiele für die Grundoperationen und Gegenzahlbildung:

$a+b$:  $a-b$:  $-a$:  $a\cdot b$:  $\frac{a}{b}$:  a^b: 

Ausdrücke ohne Klammern werden (ausser Potenzen) von links nach rechts ausgewertet. Die letzte Operation steht also rechts:

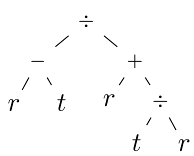
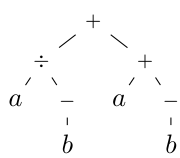
$a+b+c$:  im Gegensatz zu $a+(b+c)$: 

In mathematischer Notation und Computer Notation werden Potenzen ohne Klammern von **rechts nach links** ausgewertet. Im Binärbaum hingegen wird wie gewohnt von links nach rechts gelesen:

a^{b^c}:  im Gegensatz zu $\left(a^b\right)^c$: 

Aufgabe 2.1

Ohne zu vereinfachen, schreiben Sie folgende Terme in den jeweils anderen beiden Notationen auf:

a) $\dfrac{\frac{\frac{a}{b}}{c}+\frac{a}{\frac{b}{c}}}{\frac{\frac{a}{b}}{c}+\frac{a}{\frac{b}{c}}}$ b) `(x-y)^2/3-x*y^z` c)  d) 

e) $\dfrac{\left(a^b+b^a\right)^{c-d}}{a+b}$ f) `-a^b+(-a)^b*c+d` g) `1/a+1/-b-c` h) $\dfrac{\frac{a+b}{a-b}}{2\cdot a+b}$

2.3 Rechengesetze und Umformungssünden

Merke Summen sind doof

Viele wichtige Umformungsregeln sind für Summen (und Differenzen) nicht gültig! Z.B. Kürzen und Potenzgesetze (später auch Wurzelgesetze).

Aufgabe 2.2 Stimmen folgende Umformungen? Wenn ja, begründen Sie, wenn nein, erklären Sie den Fehler und geben Sie ein Gegenbeispiel an. Z.B $a - b \neq b - a$, für $a = 1$ und $b = 0$ erhält man $1 \neq -1$.

a) $(a/b)^e = a^e/b^e$

b) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{a} = \dfrac{\cancel{a}}{b} + \dfrac{c}{\cancel{a}} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{c}{1}$

c) $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{b}{c} = \dfrac{a}{\cancel{b}} \cdot \dfrac{\cancel{b}}{c} = \dfrac{a}{c}$

d) $(a^e)^f = a^{e+f}$

e) $(a^e)^f = \left(a^f\right)^e$

f) $\dfrac{c}{a+b} = \dfrac{c}{a} + \dfrac{c}{b}$

g) $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c}$

h) $a^e + a^e = (2a)^e$

i) $\dfrac{a^9}{a^3} = \dfrac{a^{\cancel{9}3}}{a^{\cancel{3}1}} = \dfrac{a^3}{a^1}$

j) $\dfrac{a^9}{a^3} = \left(\dfrac{a^3}{a}\right)^3$

k) $c^{12} - c^8 = c^4$

l) $x^4 + x^8 = x^2(x^2 + x^4)$

m) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{a+c}{b+d}$

n) $\dfrac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \dfrac{ab}{a+b}$

o) $5^{3^7} = 5^{21}$

p) $-\dfrac{(-1)^{123}}{(-1)^{1234}} = 1$

q) $32 \cdot 32 = 1024$

r) $-5^2 = 25$

s) $((a+b) \cdot (c+d))^6 = a + b^6 \cdot c + d^6$

t) $\left(\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d}\right)^e = \dfrac{a^e}{b} \cdot \dfrac{c^e}{d}$

2.3.1 Häufigste Fehler

Nichtbeachtung der Prioritäten: Klammern, Exponenten, Potenzen, Punktoperationen und Gegenzahlbildung, Strichoperationen.

Kürzen aus Summen: *Aus Differenzen und Summen, kürzen nur die ....*

Potenzgesetze auf Summen angewandt: Geht schief.

Vergessene Schutzklammern: Vergessene Klammern beim Anwenden von Rechenregeln auf komplexere Terme.

Addition und Subtraktion von Brüchen: Gleichnamig Machen vergessen, fälschligerweise Nenner addieren.

2.4 Zusammenfassung der behandelten Rechengesetze

2.4.1 Klammern auflösen

$$a + (b + c) = a + b + c \qquad a + (b - c) = a + (b - c)$$
$$a - (b + c) = a - b - c \qquad a - (b - c) = a - b + c$$

⚠ Klammern von innen nach aussen auflösen ⚠

2.4.2 Bruchrechnen $\frac{\textbf{Zähler}}{\textbf{Nenner}}$

Addition und Subtraktion Zuerst **gleichnamig** machen, dann Zähler addieren bzw. subtrahieren.

Kürzen Nur aus Produkten!

Erweitern Zähler und Nenner mit dem gleichen Term multiplizieren.

Multiplikation Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner. ⚠ Nicht mit Erweitern verwechseln ⚠

Kehrwert Zähler und Nenner vertauschen. Kehrwert von a ist $\frac{1}{a}$.

Division Multiplikation mit dem Kehrwert.

Mehrfachbrüche Als Division auffassen (oder geschickt erweitern).

2.5 Beträge

Definition 2.1 Betrag

Der **Betrag** einer Zahl z ist der Abstand von z zu 0. Formal:

$$|z| = \begin{cases} z & \text{wenn } z \geq 0 \\ -z & \text{wenn } z < 0. \end{cases}$$

D.h. der Betrag einer Zahl ist immer positiv, entweder die Zahl selbst, wenn sie positiv war, oder die Gegenzahl, wenn sie negativ war.
Beispiele: $|-5| = 5$, oder $|5-7| = 2$, oder $|7-5| = 2$.

Aufgabe 2.3 Berechnen Sie, bzw. vereinfachen Sie so weit wie möglich.

a) $\dfrac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}} \cdot \left(a^2 - b^2\right)$ b) $\dfrac{-17^{17} - (-17)^{17} + 17}{(3^2 + 2^3)^2}$ c) $\dfrac{\dfrac{\left(\frac{(2\cdot5^2\cdot7)^3}{(11\cdot13^2)^2}\right)^2}{\frac{(2^2\cdot5^3\cdot7^2)^4}{(11^2\cdot13^3)^3}}}{\frac{13\cdot121}{14^2}}$ d) $\dfrac{\frac{2^{4^3}}{(-2^4)^3}}{-2^{\frac{10^2}{2}}}$

e) $\left||5-7|^2 - 10\right| \cdot \left|2^3 - 1\right|$ f) $\dfrac{\frac{125}{77} \cdot \left(\frac{2^2}{7} + \frac{3}{5^2}\right)}{\frac{11}{7^2}}$ g) $\dfrac{\dfrac{\left|\frac{3}{17} - \frac{17}{11}\right|}{\frac{2^{18}}{11\cdot17}}}{\frac{1}{512}}$ h) $\dfrac{\dfrac{\frac{2^6\cdot5^6}{10^4}}{3} - \frac{13}{4}}{\frac{19}{3\cdot2^2}}$

2.6 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

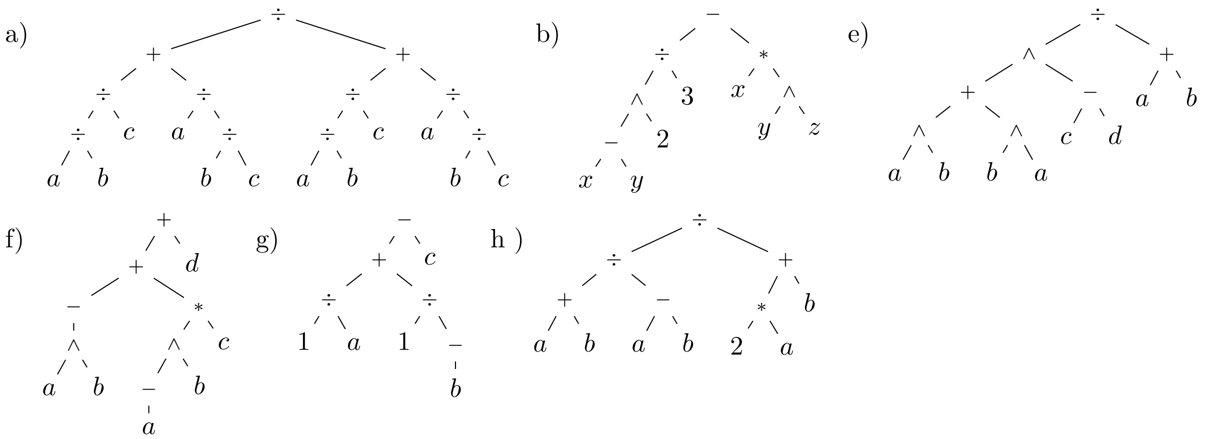
Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe 2.1 ex-termnotationen

a) `(a/b/c+a/(b/c))/(a/b/c+a/(b/c))` b) $\frac{(x-y)^2}{3} - x \cdot y^z$ c) `(r-t)/(r+t/r)` $\frac{r-t}{r+\frac{t}{r}}$

d) $\frac{a}{-b} + (a + -b)$ `a/-b+(a+-b)` e) `(a^b+b^a)^(c-d)/(a+b)` f) $-a^b + (-a)^b \cdot c + d$

g) $\frac{1}{a} + \frac{1}{-b} - c$ h) `(a+b)/(a-b)/(2*a+b)`



Lösung zu Aufgabe 2.2 ex-umformungsverbrechen

a) Richtig, Potenzgesetz.

b) Falsch (z.B. $\frac{1}{2} + \frac{2}{1} \neq \frac{1}{1} + \frac{1}{1}$.

c) Wahr (aus Produkten darf (und soll) man kürzen).

d) Falsch $a^{e \cdot f}$ wäre richtig.

e) Wahr (beides ist gleich $a^{e \cdot f}$.

f) Falsch ($\frac{1}{1+1} \neq \frac{1}{1} + \frac{1}{1}$)

g) Wahr. $\frac{a+b}{c} = \frac{1}{c} \cdot (a + b) = \frac{1}{c} \cdot a + \frac{1}{c} \cdot b$.

h) Falsch, $2a^e$ ist richtig. (sonst wird die 2 mitpotenziert).

i) Falsch, würde a^6 ergeben (Potenzgesetz).

j) Wahr (Potenzgesetz).

k) Falsch (Summen sind doof, man könnte c^8 ausklammern).

l) Falsch, man könnte x^4 ausklammern.

m) Falsch, erst erweitern, ergäbe $\frac{ad+bc}{bd}$.

n) Wahr (Nenner auf einen Bruchstrich, dann Kehrwert).

o) Falsch ($\left(\left(5^3\right)^7 = 5^{21}\right)$.

p) Wahr ($= -\frac{-1}{1}$)

q) Wahr ($2^5 \cdot 2^5 = 2^{10}$.

r) Falsch ($(-5)^2 = 25 \neq -5^2 = -(5^2)$. Potenzen vor Multiplikation und Gegenzahlbildung.

s) Falsch, ergäbe $(a+b)^6 \cdot (c+d)^6$.

t) Falsch, auch die Nenner werden potenziert.

Lösung zu Aufgabe 2.3 ex-vereinfachen-und-berechnen

a) $\dfrac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}} \cdot \left(a^2-b^2\right) = \dfrac{\frac{a^2}{a\cdot b}+\frac{b^2}{a\cdot b}}{\frac{a^2}{a\cdot b}-\frac{b^2}{a\cdot b}} \cdot \left(a^2-b^2\right) = \dfrac{\frac{a^2+b^2}{a\cdot b}}{\frac{a^2-b^2}{a\cdot b}} \cdot \left(a^2-b^2\right) = \dfrac{a^2+b^2}{\cancel{ab}} \cdot \dfrac{\cancel{ab}}{\cancel{a^2-b^2}} \cdot \cancel{\left(a^2-b^2\right)} =$
a^2+b^2

b) $\dfrac{-17^{17}-(-17)^{17}+17}{\left(3^2+2^3\right)^2} = \dfrac{-17^{17}--17^{17}+17}{(9+8)^2} = \dfrac{17}{17^2} = \dfrac{1}{17}$

c) $\dfrac{\frac{\left(\frac{\left(2\cdot5^2\cdot7\right)^3}{\left(11\cdot13^2\right)^2}\right)^2}{\frac{\left(2^2\cdot5^3\cdot7^2\right)^4}{\left(11^2\cdot13^3\right)^3}}}{\frac{13\cdot121}{14^2}} = \dfrac{\frac{\left(\frac{2^3\cdot\left(5^2\right)^3\cdot7^3}{11^2\cdot\left(13^2\right)^2}\right)^2}{\frac{\left(2^2\right)^4\cdot\left(5^3\right)^4\cdot\left(7^2\right)^4}{\left(11^2\right)^3\cdot\left(13^3\right)^3}}}{\frac{13\cdot11^2}{(2\cdot7)^2}} = \dfrac{\frac{\frac{\left(2^3\cdot5^6\cdot7^3\right)^2}{\left(11^2\cdot13^4\right)^2}}{\frac{2^8\cdot5^{12}\cdot7^8}{11^6\cdot13^9}}}{\frac{13\cdot11^2}{2^2\cdot7^2}} = \dfrac{2^6\cdot5^{12}\cdot7^6}{11^4\cdot13^8} \cdot \dfrac{11^6\cdot13^9}{2^8\cdot5^{12}\cdot7^8} \cdot \dfrac{2^2\cdot7^2}{13\cdot11^2} =$
$\dfrac{2^8\cdot5^{12}\cdot11^6\cdot7^{14}\cdot13^9}{2^8\cdot5^{12}\cdot11^6\cdot7^{14}\cdot13^9} = 1$

d) $\dfrac{\frac{2^{4^3}}{\left(-2^4\right)^3}}{-2^{\frac{10^2}{2}}} = \dfrac{\frac{2^{64}}{-2^{12}}}{-2^{50}} = \dfrac{-2^{52}}{-2^{50}} = 2^2 = 4$

e) $\left|\left|5-7\right|^2-10\right| \cdot \left|2^3-1\right| = \left|\left|-2\right|^2-10\right| \cdot |7| = \left|2^2-10\right| \cdot 7 = |4-10| \cdot 7 = |-6| \cdot 7 = 6 \cdot 7 = 42$

f) $\dfrac{\frac{125}{77} \cdot \left(\frac{2^2}{7}+\frac{3}{5^2}\right)}{\frac{11}{7^2}} = \dfrac{5^3}{11\cdot7} \cdot \left(\dfrac{2^2\cdot5^2}{7\cdot5^2}+\dfrac{3\cdot7}{7\cdot5^2}\right) \cdot \dfrac{7^2}{11} = \dfrac{5^3}{11\cdot7} \cdot \dfrac{100+21}{7\cdot5^2} \cdot \dfrac{7^2}{11} = \dfrac{5^3\cdot7^2\cdot11^2}{11^2\cdot7^2\cdot5^2} = 5$

g) $\dfrac{\frac{\left|\frac{3}{17}-\frac{17}{11}\right|}{\frac{2^{18}}{11\cdot17}}}{\frac{1}{512}} = \left|\dfrac{3\cdot11}{17\cdot11}-\dfrac{17^2}{11\cdot17}\right| \cdot \dfrac{11\cdot17}{2^{18}} \cdot 2^9 = \left|\dfrac{33-289}{11\cdot17}\right| \cdot \dfrac{11\cdot17}{2^9} = \left|\dfrac{-256}{11\cdot17}\right| \cdot \dfrac{11\cdot17}{2^9} =$
$\dfrac{2^8}{11\cdot17} \cdot \dfrac{11\cdot17}{2^9} = \dfrac{1}{2}$

h) $\dfrac{\frac{\frac{2^6\cdot5^6}{10^4}}{3}-\frac{13}{4}}{\frac{19}{3\cdot2^2}} = \left(\dfrac{\frac{(2\cdot5)^6}{10^4}}{3}-\dfrac{13}{4}\right) \cdot \dfrac{3\cdot2^2}{19} = \left(\dfrac{100\cdot4}{3\cdot4}-\dfrac{13\cdot3}{4\cdot3}\right) \cdot \dfrac{3\cdot2^2}{19} = \dfrac{400-39}{3\cdot4} \cdot \dfrac{3\cdot2^2}{19} =$
$\dfrac{361}{3\cdot2^2} \cdot \dfrac{3\cdot2^2}{19} = \dfrac{19^2}{19} = 19$

3 Exponenten in $\mathbb{Z}$

Aufgabe 3.1 Benutzen Sie das Potenzgesetz $\frac{a^e}{a^f} = a^{e-f}$ um herauszufinden, wie a^{-1} und a^{-n} (für $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}^\star$) definiert werden müssen, damit die Potenzgesetze weiterhin gültig bleiben (Permanenzprinzip).

✎ $\frac{a^0}{a^1} = a^{0-1} = a^{-1}$ aber auch $\frac{a^0}{a^1} = \frac{1}{a}$ und damit $a^{-1} = \frac{1}{a}$

$\frac{a^0}{a^n} = a^{0-n} = a^{-n}$ aber auch $\frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$ und damit $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Merke

$a^{-n} =$ ✎ $\frac{1}{a^n}$ insbesondere $a^{-1} = \frac{1}{a}$, also "hoch minus 1 bildet den **Kehrwert!**"

Alle Potenzgesetze bleiben auch für negative Exponenten erhalten!

Aufgabe 3.2 Schreiben Sie als vollständig gekürzten Bruch (oder ganze Zahl).

a) 10^{-3} b) $(0.25)^{-3}$ c) 4^{-5} d) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$

e) $\frac{\left(2^{-2}3^4\right)^3}{\left(2^3 3^{-5}\right)^{-3}}$ f) $(-1)^{-123}$ g) $(-2)^{-2}$

3.1 Wissenschaftliche Darstellung[1]

Sehr grosse und sehr kleine Zahlen werden in den Naturwissenschaften mit Hilfe von *Zehnerpotenzen* oder *Vorsätzen* geschrieben.

Entfernung Erde-Sonne $\approx$ 149 600 000 000 m ✎ $= 1.496 \cdot 10^{11}$ m $= 149.6$ Gm

Entfernung zum nächsten Stern (Proxima Centauri) 4.2 Lichtjahre: $\approx$ 40 Billionen km ✎ $4 \cdot 10^{13}$ km $=$ $4 \cdot 10^{16}$ m $= 40$ Pm

Masse eines Elektrons $\approx$ 0.000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 911 kg ✎ $9.11 \cdot 10^{-31}$ kg

Diese Schreibweise gibt zudem einen *Hinweis auf die Genauigkeit* der Angaben. (Für die Beispiele gilt: Entfernung Erde-Sonne 4-stellige Genauigkeit, Entfernung Erde-Sirius 1-stellige Genauigkeit und Masse des Elektrons 3-stellige Genauigkeit.)

Faktor	Vorsatz	Abk.	Beispiel
10^{24}	Yotta-	Y	$3.2 \cdot 10^{24}$ m = 3.2 Ym (**Yotta**meter)
10^{21}	Zetta-	Z	$3.2 \cdot 10^{21}$ m = 3.2 Zm (**Zetta**meter)
10^{18}	Exa-	E	$3.2 \cdot 10^{18}$ m = 3.2 Em (**Exa**meter)
10^{15}	Peta-	P	$3.2 \cdot 10^{15}$ m = 3.2 Pm (**Peta**meter)
10^{12}	Tera-	T	$3.2 \cdot 10^{12}$ m = 3.2 Tm (**Tera**meter)
10^{9}	Giga-	G	$3.2 \cdot 10^{9}$ m = 3.2 Gm (**Giga**meter)
10^{6}	Mega-	M	$3.2 \cdot 10^{6}$ m = 3.2 Mm (**Mega**meter)
10^{3}	Kilo-	k	$3.2 \cdot 10^{3}$ m = 3.2 km (**Kilo**meter)
10^{2}	Hekto-	h	$3.2 \cdot 10^{2}$ m = 3.2 hm (**Hekto**meter)
10^{1}	Deka-	da	$3.2 \cdot 10^{1}$ m = 3.2 dam (**Deka**meter)
10^{-1}	Dezi-	d	$3.2 \cdot 10^{-1}$ m = 3.2 dm (**Dezi**meter)
10^{-2}	Centi-	c	$3.2 \cdot 10^{-2}$ m = 3.2 cm (**Centi**meter)
10^{-3}	Milli-	m	$3.2 \cdot 10^{-3}$ m = 3.2 mm (**Milli**meter)
10^{-6}	Mikro-	μ	$3.2 \cdot 10^{-6}$ m = 3.2 μm (**Mikro**meter)
10^{-9}	Nano-	n	$3.2 \cdot 10^{-9}$ m = 3.2 nm (**Nano**meter)
10^{-12}	Pico-	p	$3.2 \cdot 10^{-12}$ m = 3.2 pm (**Pico**meter)

[1] Dieser Abschnitt basiert zum grossen Teil auf Unterrichtsunterlagen diverser Autoren der Kantonsschule am Burggraben.

(In den USA werden die -iarden nicht verwendet, d.h. die Amerikaner zählen one million= 10^6, one billion= 10^9, one trillion= 10^{12}, ...)

Merke

Eine Kommaverschiebung um n Stellen nach rechts (bzw. nach links) wird durch den Faktor 10^{-n} (bzw. 10^n) ausgeglichen!

Aufgabe 3.3 Schreiben Sie mit Hilfe von Zehnerpotenzen:

a) 100 Billionen Euro

b) 3 Tausendstel

c) 4 Hundertmillionstel

d) 7 Zehnbillionstel

Aufgabe 3.4 Schreiben Sie als Dezimalzahl:

a) 10^{-4}

b) $2.99792458 \cdot 10^8$

c) $22.4141 \cdot 10^{-3}$

d) $1013.25 \cdot 10^{-2}$

Aufgabe 3.5 Schreiben Sie die Grösse mit Hilfe der in Klammern angegebenen Vorsätzen:

a) Dicke des menschlichen Haares 70 μm (mm;m)

b) Durchmesser von Atomen 100 pm (nm;m)

Aufgabe 3.6 Rechnen Sie die folgenden Grössen um in wissenschaftlicher Darstellung:

a) 1 Liter in cm^3

b) 10 mm^2 in km^2

c) 1 kg/m^3 in g/dm^3

Aufgabe 3.7 Stimmt die folgende Faustregel: 1 Jahr dauert rund 10π Megasekunden? Geben Sie die Abweichung vom exakten Wert absolut und relativ an.

Aufgabe 3.8 Vereinfachen Sie soweit wie möglich, schreiben Sie den Ausdruck als Bruch ohne negative Exponenten und ohne negative Basen. Die Potenzen sollen nicht ausgerechnet werden.

a) $5^{-4} \cdot 5^{-6}$

b) $0.6^{-10} \cdot (-0.6)^8$

c) $\frac{c^{-2}}{c^{-5}}$

d) $\frac{b^{n+1}}{(-b)^{-3}}$

e) $\frac{12^{-2x}}{4^{-2x}}$

f) $(3^{-2})^{-3}$

g) $(-b^0)^{2m-1}$ mit $m \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

Aufgabe 3.9 Vereinfachen Sie:

a) $\frac{10a^{-3}}{2a^{-5}} \cdot 2a^{-3}$

b) $\frac{\left(\frac{x}{3}\right)^{-2}}{\left(\frac{x}{6}\right)^{-3}}$

c) $3^{-4x} - (9^{-x})^2$

d) $(a-b)^{10} \cdot (b-a)^{10}$

Aufgabe 3.10 Für welche $x \in \mathbb{Z}$ gilt:

a) $2^x = 8^{-4}$

b) $4^x = 8^{-10}$

Hinweis: Schreiben Sie die Potenzen der Gleichungen jeweils so um, dass auf beiden Seiten die gleiche Basis steht.

3.2 Prefixe in der Informatik

In der Informatik sind die Prefixe k, M, G, T, etc. nicht eindeutig definiert. Oft werden für k 2^{10}, für M 2^{20}, für G 2^{30} und T 2^{40} verwendet. Um eindeutig die Zweierpotenzen zu kennzeichnen, werden Ki, Mi, Gi, Ti, etc. vewendet. Das 'i' kommt von **bi**nary, bzw. **bi**när.

Aufgabe 3.11 Auf dem Computer werden Datenspeicher- und Dateigrössen praktisch immer mit binären Prefixen angezeigt (ohne aber die Prefixe Ki, Mi, Gi, Ti, etc. zu verwenden).

a) Festplatten- und Speichermedienhersteller verwenden praktisch immer die dezimalen Prefixe (also mit Basis 10). Warum wohl?

b) Wie viele Bytes gross ist eine Datei, für deren Grösse genau 1GB (1GiB) angezeigt wird? Geben Sie das Resultat in Exponentialschreibweise mit einer Genauigkeit von 4 Stellen an.

c) Wie gross wird dann die Kapazität einer 2TB (2 Terabytes) grossen Festplatte angezeigt? *Man vernachlässige Kapazitätsverluste, die durch Verwaltungsinformation entstehen.*

3.3 Weitere Aufgaben

Aufgabe 3.12 Vereinfachen Sie und schreiben Sie das Resultat als Produkt von Potenzen, ohne Bruchstriche und Divisionen:

a) $\dfrac{1}{4}$ b) $\dfrac{a^2}{a^{-1}b^3}$ c) $\dfrac{1}{a+b}\cdot\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$ d) $\dfrac{\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{2\cdot b}\cdot b^a}{a\cdot(a^b\cdot b^{-a})^b}}{a^{-b^2}\cdot b^{a\cdot b}\cdot a^{-2\cdot b}}$

Aufgabe 3.13 Vereinfachen Sie und schreiben Sie das Resultat ohne negative Exponenten mit höchstens einem Bruchstrich (und ohne Divisionszeichen):

a) x^{-1} b) $4^{-7}\cdot 2^{13}$ c) $\left(\dfrac{x^{-2}}{y^{-3}}\right)^{-2}\cdot\left(\dfrac{y^{-2}}{x^{-3}}\right)^{-3}$ d) $\dfrac{\frac{12^{-7}}{35^{-8}}}{\frac{30^{-5}}{28^{-6}}}\cdot\left(\dfrac{7}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\dfrac{5}{4}\right)^{-12}$

Aufgabe 3.14 Beweisen Sie, dass $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$.
Hinweis: Anstatt gerade/ungerade, untersuchen Sie die Teilbarkeit durch 3.

Aufgabe 3.15 Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch? Begründen Sie. Für falsche Aussagen, finden Sie eine kleine Korrektur, um daraus eine wahre Aussage zu machen.

a) Die Differenz zweier Zahlen in $\mathbb{N}$ ist auf jeden Fall wieder in $\mathbb{N}$.

b) Das Produkt zweier Zahlen in $\mathbb{Z}$ ist auf jeden Fall wieder in $\mathbb{Z}$.

c) Der Quotient zweier Zahlen in $\mathbb{Q}$ ist auf jeden Fall wieder in $\mathbb{Q}$.

d) Es gibt irrationale Zahlen (d.h. Zahlen in $\mathbb{R}$, die nicht in $\mathbb{Q}$ sind), deren Produkt in $\mathbb{N}$ ist.

e) Die Summe einer irrationalen Zahl (in $\mathbb{R}$, aber nicht in $\mathbb{Q}$) und einer rationalen Zahl (in $\mathbb{Q}$) ist immer irrational.

f) Abbrechende Dezimalbrüche sind immer rational.

g) Jede rationale Zahl kann als Quotient zweier natürlichen Zahlen geschrieben werden.

h) Jede irrationale Zahl kann beliebig genau durch eine natürliche Zahl angenähert werden.

Aufgabe 3.16 Man stelle sich ein unendliches grosses, karriertes Papier vor. Zeigen Sie, dass man sämtliche Häuschen mit den natürlichen Zahlen 0, 1, 2, etc. durchnummerieren kann.

3.4 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:
Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".
Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.
Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe 3.2 ex-zahlen-hoch-minus

a) $\frac{1}{1000}$ b) 64 c) $\frac{1}{1024}$ d) 125
e) $\frac{8}{27}$ f) -1 g) $\frac{1}{4}$

Lösung zu Aufgabe 3.3 ex-wort-zu-potenz

a) $= 10^{14}$ Euro b) $= 3 \cdot 10^{-3}$
c) $= 4 \cdot 10^{-8}$ d) $= 7 \cdot 10^{-13}$

Lösung zu Aufgabe 3.4 ex-sci-zu-dez

a) 0.0001 b) 299 792 458 c) 0.0224141 d) 10.1325

Lösung zu Aufgabe 3.5 ex-massumwandlungen

a) $7 \cdot 10^{-2}$ mm $= 7 \cdot 10^{-5}$ m b) 10^{-1} nm $= 10^{-10}$ m

Lösung zu Aufgabe 3.6 ex-massumwandlungen-plus

a) 1 Liter $= 10^3$ cm^3 b) 10 mm^2 $= 10^{-11}$ km^2 c) 1 kg/m^3 $= 1$ g/dm^3

Lösung zu Aufgabe 3.7 ex-jahr-in-sekunden
1a $= 3.1536 \cdot 10^7$ s 10π Ms $\approx 3.1416 \cdot 10^7$ s Differenz: $\approx 1.20073 \cdot 10^5$ s, also weniger als 1% Fehler.

Lösung zu Aufgabe 3.8 ex-vereinfachen-neg-exp

a) $5^{-4} \cdot 5^{-6} = 5^{-10} = \frac{1}{5^{10}}$

b) $0.6^{-10} \cdot (-0.6)^8 = 0.6^{-10} \cdot (0.6)^8 = 0.6^{-2} = \left(\frac{6}{10}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{5^2}{3^2}$

c) $\frac{c^{-2}}{c^{-5}} = c^{-2} \cdot c^5 = c^3$

d) $\frac{b^{n+1}}{(-b)^{-3}} = b^{n+1} \cdot (-b)^3 = -b^{n+1} \cdot b^3 = -b^{n+4}$

e) $\frac{12^{-2x}}{4^{-2x}} = \frac{(3\cdot 4)^{-2x}}{4^{-2x}} = \frac{3^{-2x} \cdot 4^{-2x}}{4^{-2x}} = 3^{-2x} = \frac{1}{3^{2x}}$

f) $(3^{-2})^{-3} = 3^6$

g) $(-b^0)^{2m-1} = (-1)^{2m-1} = -1$, weil $2m-1$ ungerade ist.

Lösung zu Aufgabe 3.9 ex-vereinfachen-neg-exp-plus

a) $\frac{10a^{-3}}{2a^{-5}} \cdot 2a^{-3} = 5a^2 \cdot 2a^{-3} = 10a^{-1} = \frac{10}{a}$

b) $\dfrac{\left(\frac{x}{3}\right)^{-2}}{\left(\frac{x}{6}\right)^{-3}} = \dfrac{3^2}{x^2} \cdot \dfrac{x^3}{6^3} = \dfrac{3^2 \cdot x}{3^3 \cdot 2^3} = \dfrac{x}{2^3 \cdot 3} = \dfrac{x}{24}$

c) $3^{-4x} - (9^{-x})^2 = 3^{-4x} - \left(3^2\right)^{-2x} = 3^{-4x} - 3^{-4x} = 0$

d) Beachte, dass $(b-a) = (-1) \cdot (a-b)$. Und so $(a-b)^{10} \cdot (b-a)^{10} = (a-b)^{10} \cdot ((-1)(a-b))^{10} = (a-b)^{10} \cdot (-1)^{10} \cdot (a-b))^{10} = (a-b)^{20}$

Lösung zu Aufgabe 3.10 ex-exponentialgleichungen

a) $2^x = \left(2^3\right)^{-4} = 2^{-12}$, also $x = -12$.

b) $\left(2^2\right)^x = \left(2^3)\right)^{-10}$
$2^{2x} = 2^{-30}$, also $2x = -30$, also, $x = -15$.

Lösung zu Aufgabe 3.11 ex-harddisk-angaben

a) Weil dann die Masszahl grösser wird. Ein z.B. 1 TB ist einiges weniger als 1 TiB.

b) 2^{30} B $\approx 1.074 \cdot 10^9$ B.

c) $2 \cdot 10^{12}/2^{40} \approx 1.81899$ TB (TiB).

Lösung zu Aufgabe 3.12 ex-als-produkt-von-potenzen

a) $= 4^{-1}$ b) $= a^3b^{-3}$ c) $= a^{-1}b^{-1}$ d) $= a^b \cdot a^{-1} = a^{b-1}$

Lösung zu Aufgabe 3.13 ex-als-bruch-ohne-neg-exp

a) $\frac{1}{x}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{x^5}$ d) 40

4 Planimetrie Grundlagen

Die Planimetrie ist die Lehre der in der Ebene liegenden Figuren. Die Ebene wird als eine **Menge von Punkten** aufgefasst.

4.1 Definitionen und Notationen

Beachten Sie, dass die Notationen in der Geometrie nicht standardisiert sind. In verschiedenen Lehrmitteln werden verschiedene Notationen verwendet.
Wir definieren folgende Notationen für Objekte in der Ebene:

P	**Punkt** (ohne Ausdehnung, bezeichnet mit grossen Buchstaben)
g	**Gerade** (beidseitig unbegrenzt, bezeichnet mit kleinen Buchstaben) Durch zwei verschiedene Punkte gibt es genau eine Gerade! Eine Gerade ist eine Menge von Punkten.
$A \in g$	Der Punkt A liegt auf der Geraden g. D.h. A ist Element der Punktemenge g.
$B \notin g$	Der Punkt B liegt nicht auf der Geraden g. D.h. B ist nicht Element von g.
AB	**Gerade** (Punktemenge) durch die Punkte A und B. Z.B. $g = AB$
$[AB]$	**Strecke** (Punktemenge) zwischen A und B, inklusive der Punkte A und B.
$\overline{AB}$	**Länge** (reelle Zahl) der Strecke $[AB]$ (gemessen als Vielfaches einer definierten Einheitslänge).
$\overline{Pg}$	**Abstand** von P zu g, definiert als die kürzeste Entfernung von P zu einem Punkt auf g.
$g \parallel h$	Zwei Geraden, die keinen Punkt gemeinsam haben, heissen **parallele** Geraden. Zu einer Geraden g und einem nicht auf ihr liegenden Punkt P gibt es genau eine Parallele p durch den Punkt P.
$S = g \cap h$	**Schnittpunkt** S der Geraden g und h. Lies «g geschnitten mit h».
$g \cap h = \varnothing$	g und h **schneiden sich nicht** (also $g \parallel h$). Das Symbol $\varnothing$ ist **leere Menge**.
$g = h$	Die beiden Geraden g und h sind **identisch**. *Manchmal werden identische Geraden ebenfalls als parallel betrachtet.*
$[AB$	**Halbgerade**, die beim Punkt A beginnt und sich durch B ins Unendliche erstreckt.
$\alpha = \sphericalangle ASB$	**Winkel** mit **Scheitel** S und **Schenkeln** $[SA$ und $[SB$. Vorläufig gilt: $\sphericalangle ASB = \sphericalangle BSA$ und damit $0° \leq \sphericalangle ASB \leq 180°$. Bezeichnung mit kleinen griechischen Buchstaben: z.B. α, β, γ, δ, ε, φ, ω.
$\sphericalangle(g,h)$	**Winkel** zwischen g und h. Vorläufig gilt $\sphericalangle(g,h) = \sphericalangle(h,g)$ und damit $0° \leq \sphericalangle(g,h) \leq 90°$
$g \perp h$	$\sphericalangle(g,h) = 90°$.
m_{AB}	**Mittelsenkrechte** zu den Punkten A, B.
M_{AB}	**Mittelpunkt** der Strecke $[AB]$.
$k = k(M,r)$	**Kreis** k mit Mittelpunkt M und Radius r.
w_{gh}	**Winkelhalbierende** zu den Geraden g, h.
w_{gh}^1, w_{gh}^2	**Winkelhalbierendenpaar** zu den Geraden g, h. Beachten Sie, dass $w_{gh}^1 \perp w_{gh}^2$.

4.2 Grundkonstruktionen mit Zirkel, Lineal und Geodreieck

m_{AB}	**Gegeben:** Punkte A und B. 1. Wähle $r > \frac{1}{2}\overline{AB}$ $\rightarrow r$ 2. $k(A,r)$ $\rightarrow k_1$ 3. $k(B,r)$ $\rightarrow k_2$ 4. $k_1 \cap k_2$ $\rightarrow P_1, P_2$ 5. P_1P_2 $\rightarrow m_{AB}$
M_{AB}	**Gegeben:** Punkte A und B. 1. $AB \cap m_{AB}$ $\rightarrow M_{AB}$
Senkrechte (Lot) p zu g durch P	**Gegeben:** Gerade g, Punkt P. 1. Mit Geodreieck $\rightarrow p$ **oder** 1. Wähle $r > \overline{Pg}$ $\rightarrow r$ 2. $k(P,r) \cap g$ $\rightarrow A, B$ 3. m_{AB} $\rightarrow p$
Parallele p zu g durch P	**Gegeben:** Gerade g, Punkt P. 1. Verschiebung mit Geodreieck $\rightarrow p$ **oder** 1. Senkrechte zu g durch P $\rightarrow h$ 2. Senkrechte zu h durch P $\rightarrow p$
w_{gh}, bzw. w^1_{gh} und w^2_{gh}	**Gegeben:** Sich schneidende Geraden g, h. 1. $g \cap h$ $\rightarrow S$ 2. Wähle einen Radius $\rightarrow r_1$ 3. $k(S, r_1)$ $\rightarrow k$ 4. $k \cap g$, $k \cap h$ $\rightarrow G$, H 5. Wähle $r_2 > \frac{1}{2}\overline{GH}$ $\rightarrow r_2$ 6. $k(G, r_2) \cap k(H, r_2)$ $\rightarrow W$ 7. SW $\rightarrow w_{gh}$, bzw. w^1_{gh} 8. Optional: Rechtwinklige zu w^1_{gh} durch S $\rightarrow w^2_{gh}$
Parallelen p_1, p_2 zu g mit gegebenem Abstand d	**Gegeben:** Gerade g, Länge d. 1. Wähle $P \in g$ $\rightarrow P$ 2. Senkrechte zu g durch P $\rightarrow h$ 3. $k(P,d) \cap h$ $\rightarrow H_1$, H_2 4. Parallelen zu g durch H_1, H_2 $\rightarrow p_1$, p_2
Winkel α übertragen	**Gegeben:** Winkel α, Scheitel S, Schenkel g, h, Halbgerade $i = [AB$ 1. Wähle einen Radius $\rightarrow r$ 2. $k(S,r)$, $k(A,r)$ $\rightarrow k_1$, k_2 3. $k_1 \cap g$, $k_1 \cap h$ $\rightarrow G$, H 4. $k_2 \cap i$ $\rightarrow I$ 5. $k(I, \overline{GH}) \cap k_2$ $\rightarrow J_1$, J_2 6. Übertragener Winkel α $\rightarrow \sphericalangle BAJ_1$, $\sphericalangle BAJ_2$

Aufgabe 4.1 Konstruieren Sie obige Grundkonstruktionen.

⚒ **Aufgabe 4.2** Erstellen Sie eine Konstruktionsbeschreibung für die Konstruktion des Abstands eines Punktes P zu einer Geraden g.

⚒ **Aufgabe 4.3** Erstellen Sie eine Konstruktionsbeschreibung für das Abtragen einer Strecke.

⚒ **Aufgabe 4.4** Konstruieren Sie ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge $s = 5$ cm und erstellen Sie eine Konstruktionsbeschreibung.

Aufgabe 4.5
Konstruieren Sie ein regelmässiges Fünfeck $ABCDE$ nach folgender Konstruktionsbeschreibung:

Gegeben: Punkt Z, Radius r, Umkreis $k = k(Z, r)$.

1.	Wähle $A \in k$	$\rightarrow A$
2.	Rechtwinklige zu ZA durch Z	$\rightarrow g$
3.	$k \cap g$	$\rightarrow G$
4.	$k(M_{ZG}, \overline{M_{ZG}A}) \cap g$	$\rightarrow F$
5.	$\overline{AF}$ von A aus auf k 4 mal abtragen	$\rightarrow B, C, D, E$

Aufgabe 4.6 «Übersetzen» und verkürzen Sie die Konstruktionsbeschreibung zur «*Konstruktion mit Zirkel und Lineal bei gegebener Seitenlänge*» zu finden im Wikipedia-Artikel «Fünfeck» in die hier vorgestellte Kurzschreibweise für Konstruktionsbeschreibungen.

4.3 Koordinatensystem

Um ein (rechtwinkliges) Koordinatensystem in der Ebene zu definieren, müssen 3 Dinge festgelegt werden:

- Ein Ursprung (auch Nullpunkt genannt) O (der Buchstabe 'O').
- Eine Einheitslänge.
- Eine Richtung für die erste Achse (x-Achse).

Die letzten zwei Dinge können z.B. durch die Wahl eines weiteren Punkts X festgelegt werden. Die Einheitslänge ist dann $\overline{OX}$. Normalerweise erhält man die y-Achse durch eine Drehung der x-Achse um 90° im **Gegenuhrzeigersinn**. Die x-Achse OX wird normalerweise horizontal mit positiver Richtung nach rechts und die y-Achse nach oben eingezeichnet.

Aufgabe 4.7 Zeichnen Sie auf kariertem Papier ein Koordinatensystem mit Mittelpunkt in der Blattmitte, Einheit 2 Häuschen und x-Achse nach rechts, y-Achse nach oben. Zeichnen Sie (in der gegebenen Reihenfolge) folgende Objekte ein:

a) Punkte $A = (8, 2)$, $B = (2, -6)$, $C = (-4, -4)$.
b) Mittelsenkrechten m_{AB} und m_{BC}.
c) Schnittpunkt $D = m_{AB} \cap m_{BC}$. Schätzen Sie die Koordinaten von D ab.
d) Strecke AB, Angabe der Länge $\ell = \overline{AB}$ (in Einheitslängen!).
e) Kreis $k_1 = k(D, \overline{DA})$. Was stellen Sie fest? Können Sie Ihre Feststellung beweisen?
f) $E = M_{AD}$ und $k_2 = k(E, \overline{EA})$.
g) Messen Sie die Dreieckswinkel $\alpha = \sphericalangle CAB$, $\beta = \sphericalangle ABC$ und $\gamma = \sphericalangle BCA$. Berechnen Sie deren Summe. Was sollte das Ergebnis sein? Warum ist dem eher nicht so?
h) Strecken $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.
i) $F = m_{AB} \cap c$. Gilt $F \in k_2$? Ist das Zufall oder können Sie das beweisen?
j) Ist $\overline{DF} = \overline{AF}$? Gilt das auch, wenn man die Punkte A, B, C etwas anders wählt?

4.4 Geometrische Örter

Ein **Geometrischer Ort** ist eine Menge von Punkten, die eine bestimmte Eigenschaft haben, bzw. eine bestimmte Bedingung erfüllen. In der konstruktiven Geometrie sind geometrische Örter normalerweise Geraden oder Kreise.

4.4.1 Geometrische Örter der konstruktiven Geometrie

m_{AB}	Gegeben sind zwei Punkte $A \neq B$. m_{AB} ist die Menge aller Punkte P für die gilt: $\overline{PA} = \overline{PB}$. Kurz: $m_{AB} = \{P \mid \overline{PA} = \overline{PB}\}$
✎ $k(M, r)$	Gegeben sind ein Punkt M und eine Länge r. ✎ $k(M, r)$ ist die Menge aller Punkte P für die gilt: $\overline{MP} = r$. Kurz: ✎ $k(M, r) = \{P \mid \overline{PM} = r\}$
✎ Winkelhalbierendenpaar w_{gh}	Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden $g \neq h$. ✎ w_{gh} ist die Menge aller Punkte P für die gilt: $\overline{Pg} = \overline{Ph}$. Kurz: ✎ $w_{gh} = \{P \mid \overline{Pg} = \overline{Ph}\}$.
✎ Mittelparallele m_{gh}	Gegeben sind zwei parallele Geraden $g \neq h$. ✎ m_{gh} ist die Menge aller Punkte P für die gilt: $\overline{Pg} = \overline{Ph}$. Kurz: ✎ $m_{gh} = \{P \mid \overline{Pg} = \overline{Ph}\}$.
Parallelenpaar zu g im Abstand d	✎ Gegeben: Gerade g, Länge d Kurz:$\{P \mid \overline{Pg} = d\}$

Geometrische Örter werden sehr oft zur Konstruktion von Punkten (oder Punktemengen) verwendet, die mehrere Bedingungen erfüllen sollen.

Beispiel: Gegeben sind zwei Punkte A, B mit $\overline{AB} = c = 5$. Gesucht ist ein Punkt C mit $\overline{AC} = b = 4$ und $\overline{BC} = a = 3$.

1. $k(A, b) \rightarrow k_1$: 1.g.O.f. C *Erster geometrischer Ort für C*
2. $k(B, a) \rightarrow k_2$: 2.g.O.f. C
3. $k_1 \cap k_2 \rightarrow C_1, C_2$

Der Punkt C muss gleichzeitig zwei Bedingungen erfüllen. Konstruktiv geht man so vor, dass man alle Punkte konstruiert, die eine Bedingung erfüllen (in diesem Fall je ein Kreis), die geometrischen Örter. Der Schnitt dieser Örter ergibt dann die Punkte, die beide Bedingungen erfüllen.

Aufgabe 4.8 Zeichnen Sie ein Koordinatensystem mit Einheit 2 Häuschen und mindestens je 6 Einheiten nach oben und unten.

Gegeben sind die Punkte $A = (-4, -3)$, $B = (2, 0)$ und $C = (0, 2)$. Daraus ergeben sich die Geraden $g = AB$ und $h = BC$.

a) Konstruieren Sie alle Kreise, die g und h berühren und durch C gehen.

b) Konstruieren Sie die Punktemenge $\{P \mid \overline{AP} = \overline{CP}$ und $\overline{Pg} \leq \overline{Ph}\}$ und heben Sie diese farblich hervor.

c) Konstruieren Sie die Punktemenge $\{P \mid \overline{PB} \leq \overline{PC}$ und $\overline{Pg} \geq \overline{Ph}\}$ und heben Sie diese farblich hervor.

Aufgabe 4.9 Auf einer Wiese ist eine Ziege am Punkt $P = (1, -2)$ mit einer Leine der Länge $\ell = 6.5$ angebunden. Auf der Wiese steht ein Haus mit quadratischem Grundriss der Seitenlänge 3 mit je einer Seite auf einer positiven Achse.

Konstruieren Sie die Menge aller Punkte, die die Ziege erreichen kann.

Aufgabe 4.10 Gegeben sind die Geraden g durch $A = (4, -2)$ und $B = (7, 2)$ und die Parallele h zu g durch den Punkt $C(-1, -0.5)$. Weiter ist der Punkt $P(6, 3.5)$ gegeben. Konstruieren Sie alle Kreise, die g und h berühren und durch P gehen. Schätzen Sie die Koordinaten der Mittelpunkte der Kreise ab.

Aufgabe 4.11 Gegeben sind die Gerade $g = G_1G_2$ mit $G_1 = (-1, -1)$ und $G_2 = (4, 1)$ und der Punkt $A = (0, 2)$. Konstruieren Sie alle Kreise, die g in G_1 berühren und durch A gehen.

Aufgabe 4.12 Gegeben sind der Kreis $k = k(M, r_1)$ mit $M = (1, -1)$ und $r_1 = 3$, die Gerade $g = G_1G_2$ mit $G_1 = (-1, -1)$ und $G_2 = (4, 1)$.

a) Konstruieren Sie alle Kreise mit Radius $r_2 = 1.5$, die k und g berühren.

b*) Welche Anzahl Lösungen sind möglich, je nach Wahl der Lage und Grössen der gegebenen Objekte?

Aufgabe 4.13 Gegeben ist $B = (0, 2)$ und ℓ (die x-Achse). Konstruieren Sie die Punkte P für die gilt: $\overline{PB} = \overline{P\ell} = d$ für alle halbzahligen Werte von d von 1 bis und mit 6. Definieren Sie in GeoGebra für d einen Schieberegler und schalten Sie die «Spur» von P ein. *Hinweis: auf dem Wiki ist ein Erklärvideo zu finden.*

Skizzieren Sie damit die Punktemenge $\{P \mid \overline{PB} = \overline{P\ell}\}$.

Aufgabe 4.14 Gegeben sind $B_1 = (-4, 0)$ und $B_2 = (4, 0)$. Konstruieren Sie die Punkte P für die gilt: $\overline{PB_1} + \overline{PB_2} = 10$ und $\overline{PB_1} = d$ für alle ganzzahligen Werte von d von 1 bis und mit 9.

Skizzieren Sie dann die Punktemenge $\{P \mid \overline{PB_1} + \overline{PB_2} = 10\}$.

Mit welchen Hilfsmitteln könnte man diese Punktemenge relativ einfach zeichnen?

Aufgabe 4.15 Sie stehen auf dem Punkt $P = (-2, -1)$, die Strecke $[AB]$ mit $A = (-3, 0)$ und $B = (3, 0)$ ist eine unüberwindbare Mauer. Welche Punkte hinter der Mauer (d.h. oberhalb der Geraden AB) haben die Eigenschaft, dass sie von P gleich weit entfernt sind, egal, ob man die Mauer bei A oder B umgeht?

Wählen Sie das Koordinatensystem mit mindestens 2 Einheiten nach unten und 6 Einheiten nach oben.

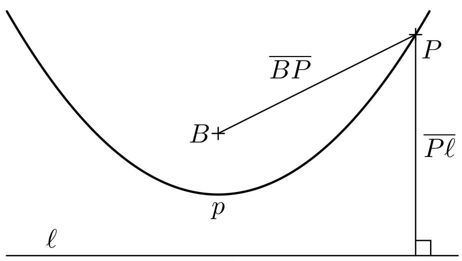
a) Konstruieren Sie den Punkt X auf $[AB]$ der die obige Eigenschaft hat.

b) Konstruieren Sie mindestens 5 weitere Punkte oberhalb der Geraden AB mit der obigen Eigenschaft.

Merke

✎ Eine Parabel p ist der geometrische Ort aller Punkte P, die zu einer gegebenen Gerade ℓ (*Leitlinie*) und einem Punkt B (*Brennpunkt*) den gleichen Abstand haben.
$p = \{P \mid \overline{PB} = \overline{P\ell}\}$.

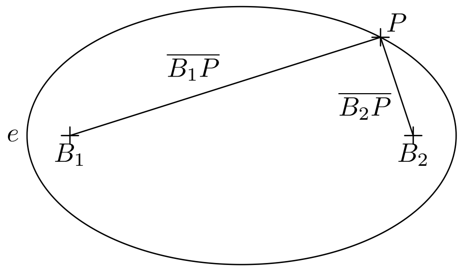
Eine Parabel hat die Eigenschaft, dass Strahlen, die senkrecht zur Leitlinie einfallen, alle zum Brennpunkt reflektiert werden. Dreht man eine Parabel um ihre Symmetrieachse, entsteht ein Paraboloid. Parabolantennen (Satellitenschüsseln) sind Paraboloide mit der Antenne im Brennpunkt.



Merke

✎ Eine Ellipse e ist der geometrische Ort aller Punkte P, die von zwei gegebenen Punkten B_1 und B_2 (Brennpunkte) eine konstante Abstandssumme d haben ($d > \overline{B_1B_2}$).
$e = \{P \mid \overline{PB_1} + \overline{PB_2} = d\}$.

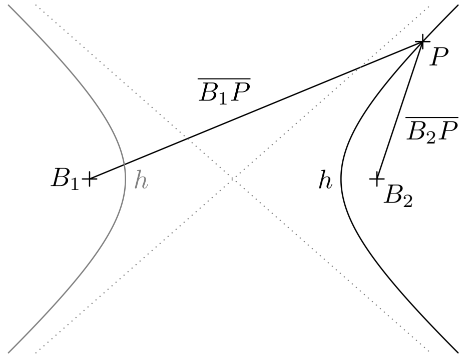
Eine Ellipse hat die Eigenschaft, dass Strahlen, die von einem Brennpunkt ausgehen, auf den anderen Brennpunkt reflektiert werden.
Planetenumlaufbahnen sind in sehr guter Näherung ebenfalls Ellipsen, wobei die Sonne in einem Brennpunkt steht).



Merke

Eine Hyperbel h ist der geometrische Ort aller Punkte P, die von zwei gegebenen **Brennpunkten** B_1 und B_2 einen konstanten **Abstandsunterschied** d haben ($d < \overline{B_1B_2}$).
$h = \{P \mid |\overline{PB_1} - \overline{PB_2}| = d\}$.
Lässt man die Beträge weg, erhält man nur einen Hyperbel-Ast.

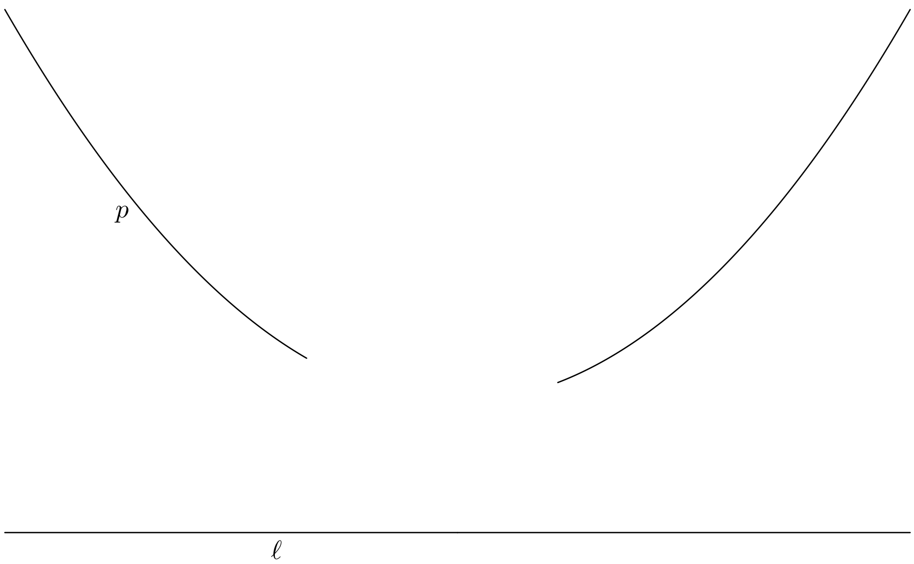
Eine Hyperbel hat die Eigenschaft, dass Strahlen, die von einem Brennpunkt ausgehen so reflektiert werden, als kämen die Strahlen vom anderen Brennpunkt.
Die Bahn eines Himmelskörper, der zu schnell unterwegs ist, um in eine Umlaufbahn einzuschwenken, beschreibt eine Hyperbel.
Eine Hyperbel hat zwei **Asymptoten**, d.h. zwei Geraden (in der Skizze oben gestrichelt), denen sich die Kurve immer mehr annähert.



Aufgabe 4.16 Gegeben ist eine Strecke $[AB]$ und eine Länge ℓ. Was ist der geometrische Ort aller Punkte C, für die der Umfang vom $\triangle ABC$ gleich ℓ ist? Was für Bedingungen muss ℓ erfüllen, damit es überhaupt eine Lösung gibt?

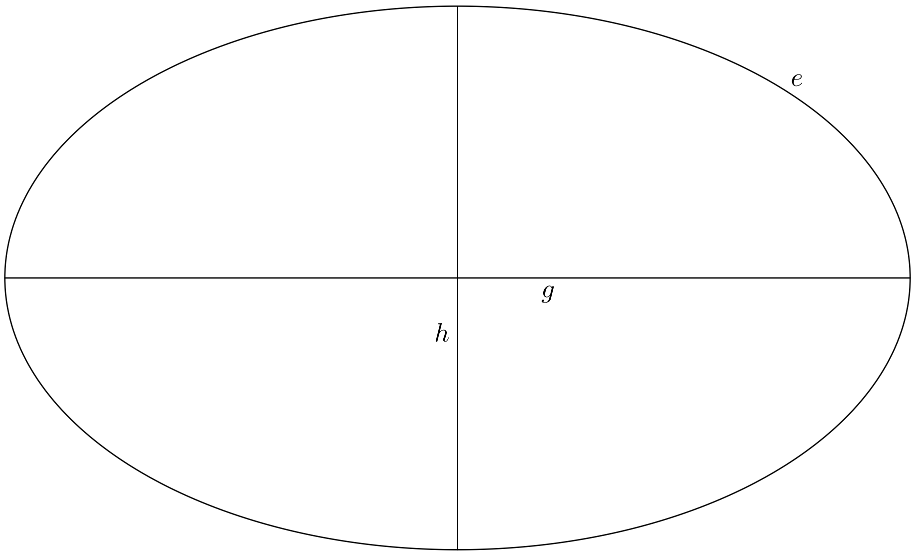
Aufgabe 4.17 Gegeben ist eine Gerade g und ein Punkt P. Was ist der geometrische Ort der Kreiszentren Z der Kreise, die g berühren und durch P gehen, wenn a) $P \in g$? Und wenn b) $P \notin g$?

Aufgabe 4.18 Gegeben ist eine Parabel p und ihre Leitlinie ℓ. Durch einen Druckfehler ging ein Teil der Parabel verloren. Konstruieren Sie direkt auf dieses Blatt den Brennpunkt der Parabel und den Scheitelpunkt S der Parabel (der Punkt der Parabel, der am nächsten an ℓ ist).



Aufgabe 4.19 Gegeben ist eine Ellipse e sowie ihre Symmetrieachsen g und h. Konstruieren Sie die Brennpunkte der Ellipse e direkt auf dieses Blatt.

Hinweis: *Die Konstruktion ist extrem einfach. Die Schwierigkeit dieser Aufgabe liegt darin, die nötigen geometrischen Überlegungen zu führen und sauber zu dokumentieren.*



4.4.2 Zusammenfassung Kegelschnitte

Kurve	*Gegeben*	*geometrischer Ort*	*Reflexionseigenschaft*
Parabel	Brennpunkt B, Leitlinie ℓ	$\{P \mid \overline{PB} = \overline{P\ell}\}$	Senkrecht zur Leitlinie einfallende Strahlen werden zum Brennpunkt hin reflektiert.
Ellipse	Brennpunkte B_1, B_2, Abstandssumme $d > \overline{B_1B_2}$	$\{P \mid \overline{PB_1} + \overline{PB_2} = d\}$	Strahlen, die von einem Brennpunkt ausgehen werden zum anderen Brennpunkt hin reflektiert.
Hyperbel	Brennpunkte B_1, B_2, Abstandunterschied $d < \overline{B_1B_2}$	$\{P \mid \lvert\overline{PB_1} - \overline{PB_2}\rvert = d\}$	Strahlen, die von einem Brennpunkt ausgehen werden so reflektiert, als kämen sie vom anderen Brennpunkt.

Aufgabe 4.20 Von einer Ellipse kennt man den einen Brennpunkt $B_1 = (2, 0)$ und zwei Punkte $P_1 = (0, 2)$ und $P_2 = (-1, 1)$ auf der Ellipse.

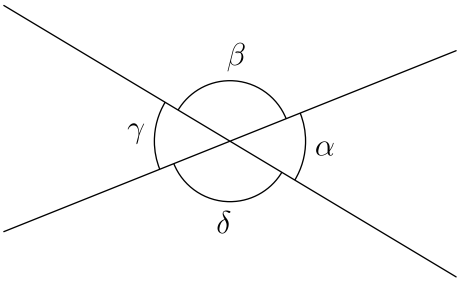
a) Gegeben ist die Abstandssumme $d = 5$. Konstruieren Sie den (die) zweiten Brennpunkt(e) und skizzieren Sie die Ellipse(n).

b*) Wenn die Abstandssumme nicht gegeben ist, beschreiben Sie den geometrischen Ort aller zweiten Brennpunkte B_2.

Aufgabe 4.21 Von einer Parabel kennt man zwei Punkte auf der Parabel $P_1 = (-4, 0)$ und $P_2 = (4, 2)$ sowie den Brennpunkt $B = (-1, -3)$. Konstruieren Sie alle möglichen Leitlinien und die entsprechenden Scheitelpunkte der Parablen (Punkte, die am nächsten an der Leitlinie sind) und skizzieren Sie die entsprechenden Parabeln.

4.5 Winkelsätze an Geraden

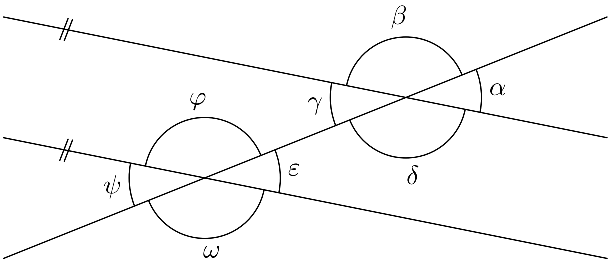
4.5.1 Scheitel- und Nebenwinkel



Scheitelwinkel sind ✎ gleich gross:
$\alpha = \gamma$ und $\beta = \delta$.

Nebenwinkel ergänzen sich zu ✎ $180°$:
$\alpha + \beta = \beta + \gamma = \gamma + \delta = \delta + \alpha = 180°$.

4.5.2 Winkel an Parallelen



Stufenwinkel sind ✎ gleich gross:
$\alpha = \varepsilon$, $\beta = \varphi$, $\gamma = \psi$ und $\delta = \omega$.

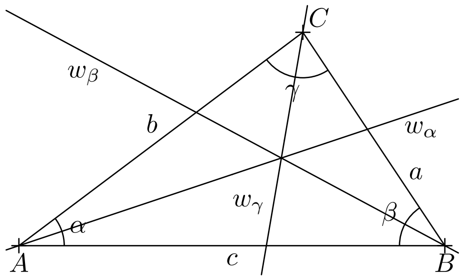
Ergänzungswinkel ergänzen sich zu ✎ $180°$:
$\alpha + \varphi = \alpha + \omega = 180°$,
$\beta + \varepsilon = \beta + \psi = 180°$,
$\gamma + \varphi = \gamma + \omega = 180°$,
$\delta + \varepsilon = \delta + \psi = 180°$.

Den Scheitelwinkel eines Stufenwinkels nennt man auch **Wechselwinkel** (z.B. $\alpha = \psi$).

4.5.3 Bezeichnungen und Winkel in Dreiecken

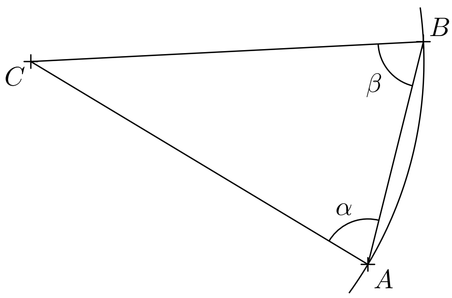
Für ein Dreieck ($\triangle ABC$) gelten folgende Notationen:

A, B, C	**Eckpunkte**, normalerweise im Gegenuhrzeigersinn.
a, b, c	**Seiten**, gegenüber der entsprechenden Eckpunkten.
α, β, γ	**Innenwinkel** an den entsprechenden Eckpunkten.
w_α, w_β, w_γ	**Winkelhalbierende** der entsprechenden Winkel.
h_a, h_b, h_c	**Höhen** auf die entsprechenden Seiten.
M_a, M_b, M_c	**Seitenmittelpunkte**.
m_a, m_b, m_c	**Mittelsenkrechten** der entsprechenden Seiten.
s_a, s_b, s_c	**Schwerlinien**. Z.B. $s_a = AM_a$



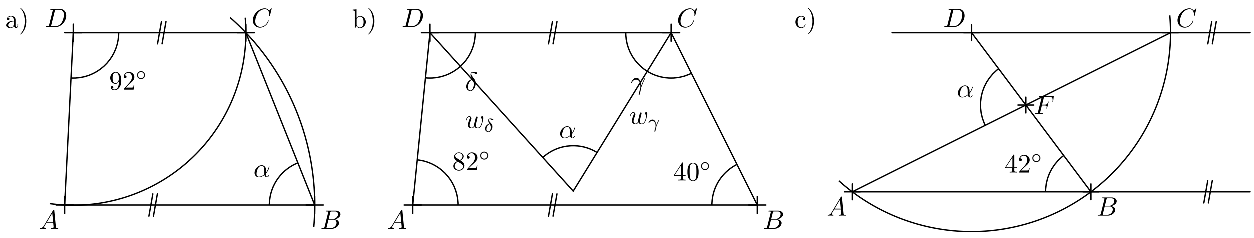
Aufgabe 4.22
Mit den Winkelsätzen an Parallelen beweisen Sie, dass die Innenwinkelsumme in einem Dreieck $180°$ ist.

Gleichschenklige Dreiecke
Ein Dreieck ist **gleichschenklig** wenn zwei Seiten gleich lang sind. Die gleich langen Seiten nennt man **Schenkel**, die dritte Seite heisst **Basis**. Die Winkel zwischen Basis und Schenkeln sind gleich.



Gleichseitige Dreiecke
In einem gleichseitigen Dreieck sind alle Seiten gleich lang und damit alle Innenwinkel gleich $60°$.

Aufgabe 4.23 Wie gross ist der Winkel α? *Hinweis: Die Skizzen sind nicht massstabgetreu.*



Aufgabe 4.24 Zeigen Sie, dass die beiden Winkelhalbierenden senkrecht aufeinander stehen.

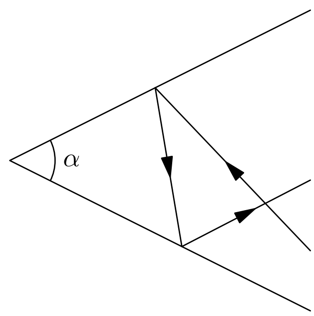
Aufgabe 4.25 In einem gleichschenkligen Dreieck mit $\alpha = \beta$ ist
a) $\gamma = 40°$ b) $\gamma = 3\alpha$ c) $\beta + \gamma = 140°$ d) $\alpha = \gamma$
Wie gross ist α?

Aufgabe 4.26 Beweisen Sie: In jedem $\triangle ABC$ gilt $\sphericalangle(w_\alpha, w_\beta) = 90° - \frac{\gamma}{2}$. *Hinweis: Nehmen Sie an, die Winkel des Dreiecks sind gegebene Grössen, deren Zahlwerte man aber nicht kennt.*

Aufgabe 4.27
Ein Lichtstrahl wird an den beiden Schenkeln eines Winkels α reflektiert. Dabei gilt das Reflexionsgesetz aus der Physik:

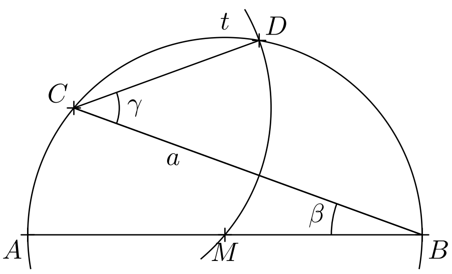
Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel.

Unter welchem Winkel δ schneiden sich der einfallende und der ausfallende Lichtstrahl? *Hinweis: Führen Sie die Hilfswinkel β und γ im Dreieck mit dem Winkel α ein.*



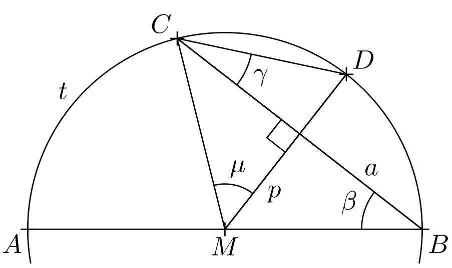
Aufgabe 4.28
Gegeben ist eine Strecke $[AB]$ und ein Winkel β mit Scheitel B und Schenkeln AB und a. Es wird folgende Konstruktion ausgeführt:
1. M_{AB} $\to M$
2. $k(M, \overline{MA})$ $\to t$
3. $a \cap t$ $\to C$
4. $k(C, \overline{CM}) \cap t$ $\to D$

a) Berechnen Sie $\gamma = \sphericalangle BCD$ in Abhängigkeit von β. Hinweis: Untersuchen Sie das Dreieck $\triangle MCD$.
b) Für welchen Winkel β ist $CD \parallel AB$?



Aufgabe 4.29
Gegeben ist eine Strecke $[AB]$ und ein Winkel β mit Scheitel B und Schenkeln AB und a. Es wird folgende Konstruktion ausgeführt:
1. M_{AB} $\to M$
2. $k(M, \overline{MA})$ $\to t$
3. $a \cap t$ $\to C$
4. $\perp$ zu a durch M $\to p$
5. $p \cap t$ $\to D$

a) Berechnen Sie $\gamma = \sphericalangle BCD$ und $\mu = \sphericalangle CMD$ in Abhängigkeit von β.



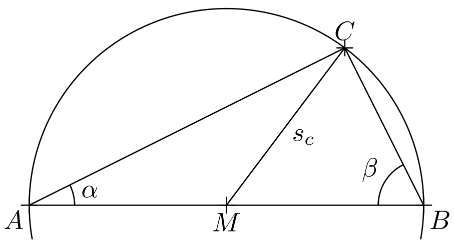
4.6 Kreiswinkelsätze

4.6.1 Thaleskreis

Satz 1

Liegt in einem Dreieck ABC der Punkt C auf dem Kreis mit Durchmesser $[AB]$, dann ist $\gamma = \sphericalangle BCA = 90°$ und umgekehrt.
Der Kreis über dem Durchmesser $[AB]$ heisst **Thaleskreis**.

Beweis: $(C \in k(M_{AB}, \overline{AM_{AB}}) \Rightarrow \gamma = 90°)$

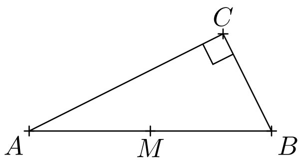


✎ $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC}$ und damit sind $\triangle AMC$ und $\triangle MBC$ gleichschenklig.
Also gilt: $\gamma = \alpha + \beta$.
Eingesetzt in $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ ergibt sich:

$$\gamma + \gamma = 180° \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = 90°,$$

was zu beweisen war.

Beweis: $(\gamma = 90° \Rightarrow C \in k(M_{AB}, \overline{AM_{AB}}))$



✎ Man spiegelt C and M und erhält ein Rechteck ($\alpha + \beta = 90°$). Die Diagonalen in einem Rechteck halbieren sich, und damit gilt $\overline{AM} = \overline{MC} = \overline{MB}$, womit bewiesen ist, dass C auf dem Kreis mit Durchmesser $[AB]$ liegt.

Merke

Der Thaleskreis ist der geometrische Ort aller Punkte P, die über einer gegebenen Strecke $[AB]$ einen Winkel von 90° bilden.

Merke

Berührt eine Gerade g einen Kreis $k = k(Z, r)$ im Punkt G, nennt man diese Gerade eine **Tangente** and k mit Berührungspunkt G und es gilt:

$$ZG \perp g$$

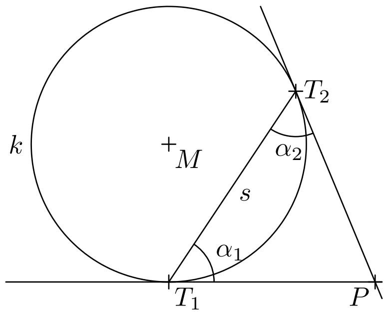
Aufgabe 4.30 Gegeben ist ein Kreis $k = k(Z, r)$ und ein Punkt P ausserhalb von k. Konstruieren Sie die Tangenten an k durch P.

Aufgabe 4.31 Eine Strecke $[AB]$ der Länge 6 hat den Punkt A irgendwo auf der x-Achse und B so auf der y-Achse, dass $\overline{AB} = 6$. Konstruieren Sie einige Punkte des geometrischen Ortes aller Punkte M_{AB}, stellen Sie eine Vermutung für diesen Ort auf und beweisen Sie Ihre Vermutung.

Aufgabe 4.32 Gegeben sind zwei Kreise $k_1 = k(Z_1, r_1)$ und $k_2 = k(Z_2, r_2)$ mit $Z_1 = (-3, 1)$ und $r_1 = 3$ und $Z_2 = (4, -3)$ und $r_2 = 1.5$. Konstruieren Sie alle 4 Geraden, die beide Kreise berühren.
Hinweis: Vergrössern oder verkleinert man die Radien beider Kreise um die gleiche Länge, verschieben sich gemeinsame Tangenten parallel. Vergrössern, bzw. verkleinern Sie einen Kreis so, dass der andere zum Punkt wird. Machen Sie erst eine Skizze, um die Situation zu verstehen.

Aufgabe 4.33 In einem allgemeinen Dreieck $\triangle ABC$ seien H_a und H_b die Höhenfusspunkte der Höhen h_a und h_b auf den Seiten a, bzw. b. Zeigen Sie, dass das Dreieck $\triangle M_{AB}H_aH_b$ gleichschenklig ist.

4.6.2 Sehnen-Tangenten-Winkel



✎ Die Winkel $\sphericalangle MT_{1,2}P$ sind beide 90°. Also

$$\alpha_1 = 90° - \sphericalangle MT_1T_2 \quad \text{und} \quad \alpha_2 = 90° - \sphericalangle MT_2T_1$$

Das $\triangle MT_1T_2$ ist gleichschenklig, also $\sphericalangle MT_1T_2 = \sphericalangle MT_2T_1$. Und damit

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

Dies gilt für alle gleich langen Sehnen s.

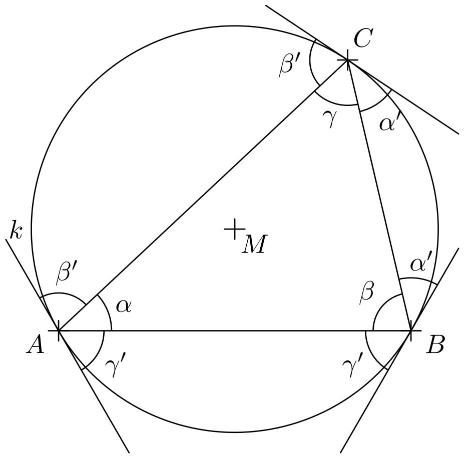
Merke

Sehnen-Tangenten-Winkel über gleich langen Sehnen sind gleich gross.

Aufgabe 4.34 Beweisen Sie mit Hilfe der Skizze oben, dass der **Zentriwinkel** $\sphericalangle T_1MT_2 = 2\alpha$.

4.6.3 Peripherie-Winkel

Ein Peripheriewinkel ist ein Winkel mit Scheitel auf der Kreislinie und Schenkeln durch die Endpunkte einer Kreissehne. Z.B. der Winkel γ über der Sehne $[AB]$ in der folgenden Skizze:



✎ Im $\triangle ABC$ gilt: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$
Eingesetzt in

$$(\alpha+\beta'+\gamma')+(\beta+\alpha'+\gamma')+(\gamma+\alpha'+\beta') = 3\cdot 180°$$

erhält man

$$180° + 2\alpha' + 2\beta' + 2\gamma' = 3 \cdot 180°$$

also

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 180°$$

Im Punkt A gilt $\alpha + \beta' + \gamma' = 180°$ und damit

$$\alpha' = \alpha$$

Analog dazu beweist man $\beta' = \beta$ und $\gamma' = \gamma$.

Da keine Annahmen über die Wahl der Punkte A, B, C auf dem Kreis k getroffen wurden, ist der Beweis allgemein gültig. Insbesondere gilt der Beweis, wenn $[BC]$ fix ist und A auf dem Kreis wandert. Die Winkel α' ändern sich dabei nicht, also bleibt auch der Winkel α immer gleich gross.

Merke

Peripheriewinkel über gleich langen Sehnen sind gleich gross.
Und umgekehrt gilt auch, dass der geometrische Ort aller Punkte C, die über einer Strecke $[AB]$ einen Winkel γ bilden, einem Kreisbogenpaar über $[AB]$, dem sogenannten **Ortsbogenpaar** entspricht.

Aufgabe 4.35 Über einer gegebenen Strecke $[AB]$ konstruieren Sie den Ortsbogen für einen gegebenen Winkel $\gamma = 65°$.

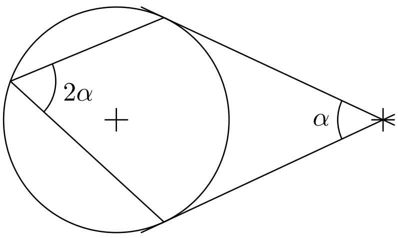
Aufgabe 4.36 Von einem Dreieck ABC ist folgendes gegeben (Einheit jeweils 2 Häuschen (oder 1cm)):
a) $c = 5$, $\gamma = 60°$, $h_c = 4$.
b) $c = 5$, $\gamma = 60°$, $\delta = \sphericalangle ACM_{AB} = 40°$.
c*) $c = 5$, $h_a = 3$, $\gamma = 70°$

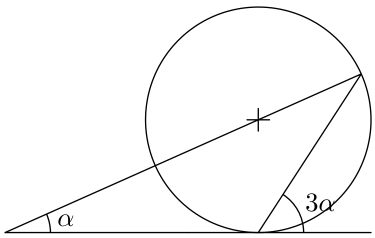
Aufgabe 4.37 Gegeben sind zwei unterschiedlich grosse Kreise k_1 und k_2, die sich in einem Punkt B von aussen berühren. Durch den Punkt B wird eine Gerade g gelegt, die keine Tangente an die Kreise ist. Die Gerade g schneidet die Kreise k_1 und k_2 in je einem weiteren Punkt T_1 und T_2. Seien t_1 bzw. t_2 die Tangenten an k_1 bzw. k_2 im Punkt T_1 bzw. T_2.

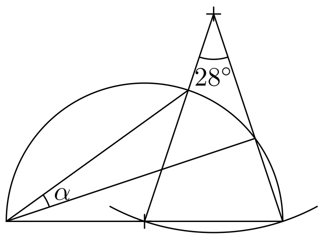
a) Machen Sie eine saubere Skizze der Situation.

b) Beweisen Sie, dass $t_1 \parallel t_2$.

Aufgabe 4.38 Berechnen Sie den Winkel α:

a)


b)


c)


Aufgabe 4.39 Gegeben sind zwei unterschiedlich grosse Kreise k_1 und k_2, die sich in zwei Punkten A und B schneiden. Weiter ist eine beliebige Gerade g durch A gegeben, die beide Kreise schneidet, nämlich in den Punkten $C = g \cap k_1$ und $D = g \cap k_2$.

a) Machen Sie eine saubere Skizze der Situation.

b) Beweisen Sie, dass der Winkel $\sphericalangle CBD$ immer gleich gross ist, egal wie g durch A gelegt wird.

Aufgabe 4.40 Diese Aufgabe kann mit GeoGebra gelöst werden.

Gegeben ist ein Kreis k und zwei beliebige, sich nicht schneidende Sehnen $[AB]$ und $[CD]$ (also $A, B, C, D \in k$). *Hinweis: Die Sehne $[CD]$ soll auf dem Kreis wandern können. Definieren Sie darum in GeoGebra die Sehne $[CD]$ mit Hilfe eines Kreises mit Mittelpunkt C auf k und gegebenem Radius. D ist dann ein Schnittpunkt der Kreise.*

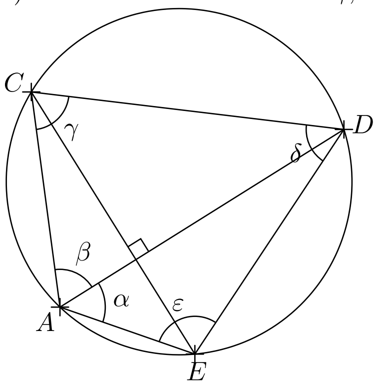
Sei X der Diagonalenschnittpunkt des Vierecks, geformt durch die vier Punkte A, B, C, D.

Wenn die Sehne $[CD]$, ohne ihre Länge zu ändern, auf k wandert, wo liegen dann alle Punkte X? Stellen Sie eine Vermutung auf und beweisen Sie diese.

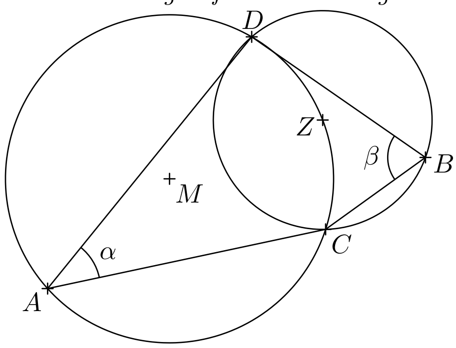
Aufgabe 4.41 Gegeben ist ein allgemeines Dreieck $\triangle ABC$. Im Punkt A wird die Tangente t an den Umkreis gelegt. Berechnen Sie den Winkel $\delta = \sphericalangle(t, a)$, wenn α, β und γ gegeben sind. Machen Sie eine saubere Skizze der Situation. *Hinweis: Das Resultat ist eine Formel, die gegebene Winkel enthält.*

Aufgabe 4.42

a) Berechnen Sie die Winkel γ, δ und ε aus α und β:



b) Wie hängen α und β zusammen? *Hinweis: A und B sind beliebig auf den Kreisen gewählt.*



Aufgabe 4.43 Beweisen Sie, dass in jedem beliebigen $\triangle ABC$ folgendes gilt: $w_\gamma \cap m_{AB} \in u$, wobei u der Umkreis des Dreiecks ist.

4.7 Repetitionsaufgaben

Aufgabe 4.44 Gegeben sind zwei Kreise k_1 und k_2 mit Zentren Z_1 und Z_2 mit unterschiedlichen Radien r_1 und r_2.

a) Beschreiben Sie, wie man die Kreiszentren Z_3 eines Kreises k_3 mit gegebenem Radius r_3 konstruiert, so dass k_3 beide Kreise k_1 und k_2 berührt.. Wie viele Lösungen kann es maximal geben? Kann es null Lösungen geben?

b) Man nimmt an, dass $k_1 \cap k_2 = \varnothing$ und dass $\overline{Z_1Z_2} > r_1 + r_2$. Beschreiben Sie, wie man den Kreis mit kleinstmöglichem Radius konstruiert, der beide Kreise k_1 und k_2 berührt.

c) Man nimmt an, dass $k_1 \cap k_2 = \varnothing$ und dass $\overline{Z_1Z_2} > r_1 + r_2$. Was ist der geometrische Ort aller Kreiszentren der Kreise, die beide gegebenen Kreise von aussen berühren?

Aufgabe 4.45 Zeigen Sie, dass sich eine Ellipse und eine Hyperbel mit gemeinsamen Brennpunkten senkrecht schneiden. Verwenden Sie dazu die Reflexionseigenschaften der beiden Kurven. *Hinweis: Der Schnittwinkel zweier Kurven ist gleich dem Winkel der entsprechenden Tangenten im Schnittpunkt.*

Aufgabe 4.46 Ein Lichtstrahl g wird von einer Kurve k so reflektiert, als ob der Lichtstrahl von der Tangente im Schnittpunkt $g \cap k$ reflektiert würde.

Gegeben ist ein Kreis um $Z = (1, -2)$ mir Radius $r = 4$ und die Punkte $A = (-6, 4)$ und $B = (-4, 3)$. Konstruieren Sie die Reflexion am Kreis des von A durch B gehenden Lichtstrahls.

Aufgabe 4.47 Gegeben sind zwei Kreise $k_{1,2}$ die sich nicht schneiden und die nicht ineinander liegen. Es gibt also zwei äussere gemeinsame Tangenten t_1 und t_2 und zwei innere gemeinsame Tangenten t_3 und t_4. Zeigen Sie, dass die vier Schnittpunkte je einer inneren mit einer äusseren Tangente auf einem Thaleskreis über Z_1, Z_2 liegen.

Machen Sie dazu eine gute Skizze mit Zirkel und Lineal, die gemeinsamen Tangenten brauchen aber nicht konstruiert zu werden.

Aufgabe 4.48 Zeichnen Sie ein spitzwinkliges Dreieck ABC und konstruieren Sie einen Halbkreis mit Mittelpunkt auf der Seite c so, dass die Seiten a und b Tangenten des Halbkreises sind.

Aufgabe 4.49 Gegeben sind

a) zwei sich schneidende Geraden g und h mit $\sphericalangle(g, h) = 60°$.
b) zwei sich schneidende Kreise $k_1 = k(M_1, r_1 = 3)$ und $k_2 = k(M_2, r_2 = 2.5)$ mit $\overline{M_1M_2} = 4$.
c) eine Gerade g und ein Kreis $k = k(M, r = 3)$ mit $\overline{Mg} = 1$.
Konstruieren Sie alle Kreise mit Radius 1, so dass die zwei gegebenen Geraden bzw. zwei Kreise bzw. die Gerade und den Kreis berührt werden. Wie gross ist jeweils die Anzahl der Lösungen?

4.8 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe 4.2 ex-kb-abstand-p-g

Gegeben: Gerade g, Punkt P (mit $P \notin g$).

1. Wähle $r > \overline{Pg}$ $\rightarrow r$
2. $k(P, r)$ $\rightarrow k$
3. $k \cap g$ $\rightarrow A, B$
4. M_{AB} $\rightarrow Q$
5. $\overline{PQ}$ $\rightarrow \overline{Pg}$

Lösung zu Aufgabe 4.3 ex-kb-strecke-abtragen

Gegeben: Strecke $[AB]$, Gerade g mit Punkt $P \in g$.

1. $\overline{AB}$ $\rightarrow r$
2. $k(P, r)$ $\rightarrow k$
3. $k \cap g$ $\rightarrow C, D$

Lösung zu Aufgabe 4.4 ex-kb-gleichseitiges-dreieck

Gegeben: Länge $s = 5$ cm.

1. Punkt A wählen $\rightarrow A$
2. Gerade c durch A wählen $\rightarrow c$
3. s von A auf g abtragen $\rightarrow B_1, B_2$
4. $k(A, s)$ $\rightarrow k_1$
5. $k(B_1, s)$ $\rightarrow k_2$
6. $k_1 \cap k_2$ $\rightarrow C_1, C_2$

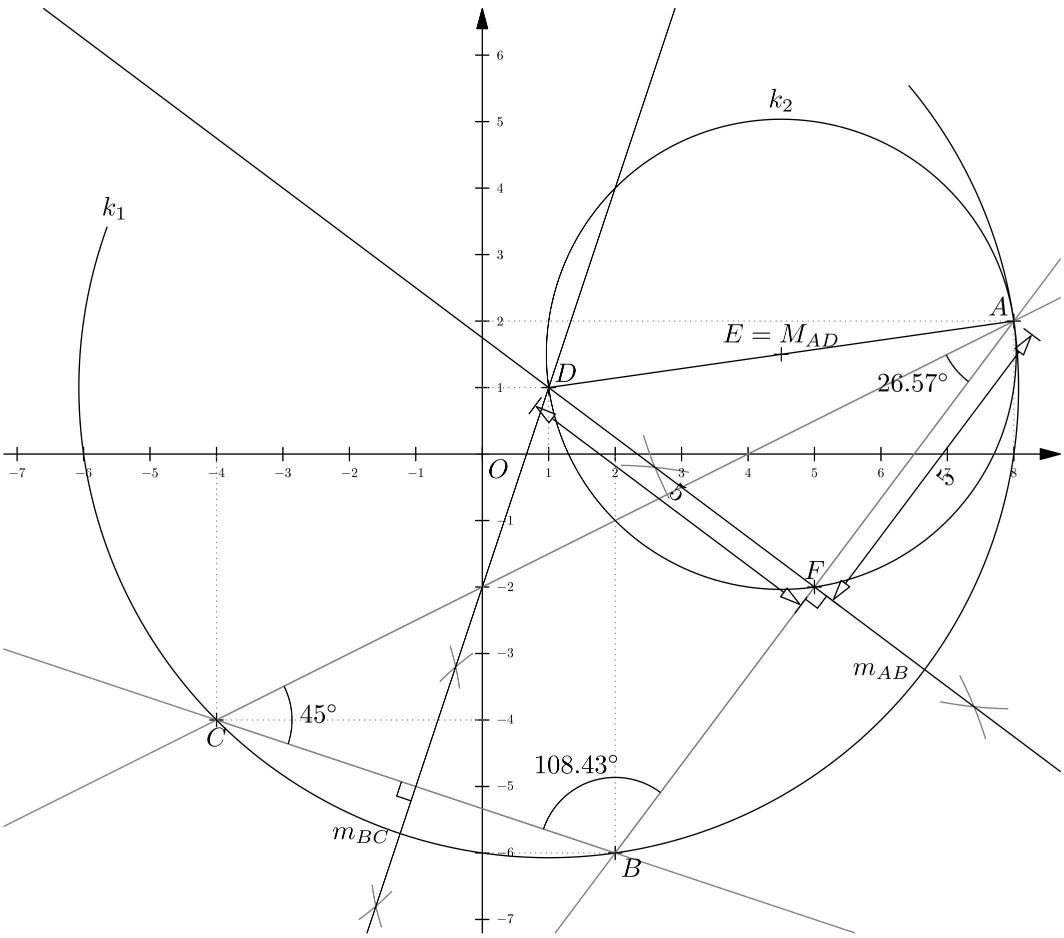
Lösung: ΔAB_1C_1.

Lösung zu Aufgabe 4.6 ex-kb-penta-aus-seite

Gegeben: Punkte A, B.

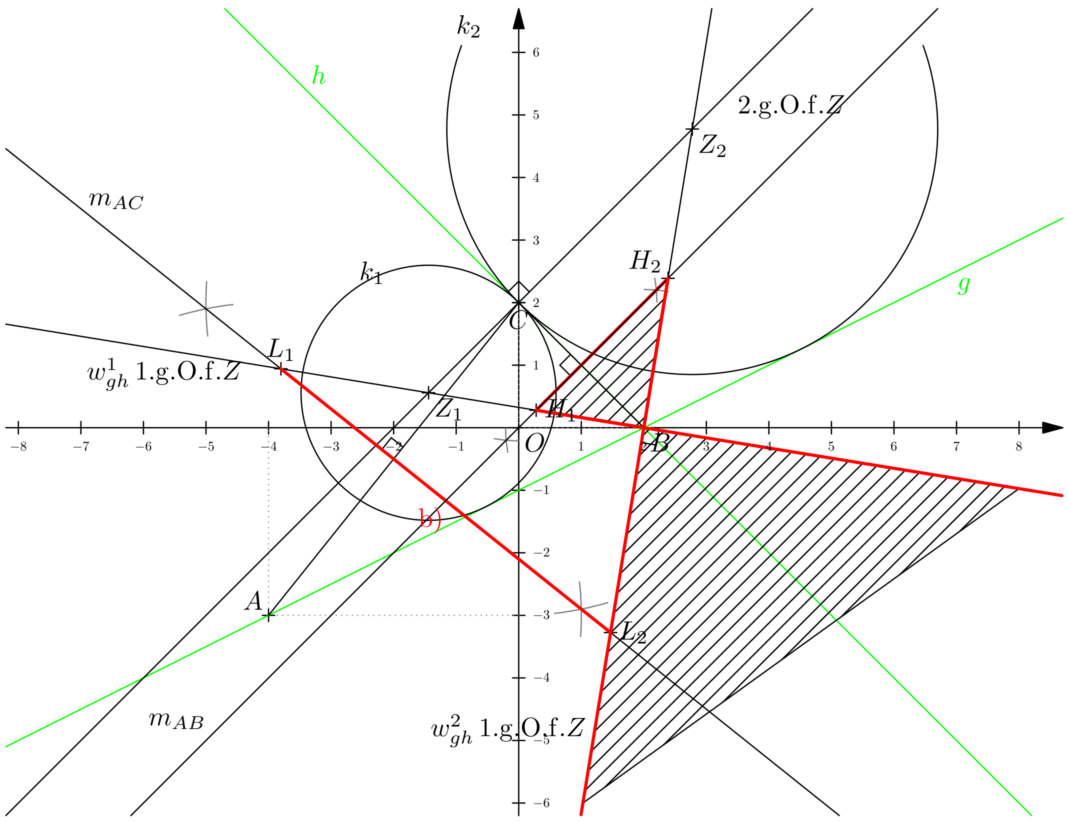
1. Senkrechte zu AB durch A $\rightarrow h$
2. $k(A, \overline{AB})$ $\rightarrow k_1$
3. $k_1 \cap h$ $\rightarrow H$
4. $k(M_{AB}, \overline{M_{AB}H}) \cap AB$ $\rightarrow J$
5. $k(M_{AB}, \overline{M_{AB}J})$ $\rightarrow k_2$
6. $k_1 \cap k_2$ $\rightarrow E$
7. $m_{AB} \cap k_2$ $\rightarrow D$
8. $k(D, \overline{DE}) \cap k(B, \overline{AB})$ $\rightarrow C$

Lösung zu Aufgabe 4.7 ex-koordinaten-system-einfuehrung



c) $D = (1, 1)$ (sogar exakt).
d) 10 Einheiten (bei 8mm Einheit: 80mm/8mm = 10)
e) $A, B, C \in k_1$, weil D ist der Umkreismittelpunkt vom $\triangle ABC$. Weil $D \in m_{AB}$ gilt $\overline{DA} = \overline{DB}$, und weil $D \in m_{BC}$ gilt $\overline{DB} = \overline{DC}$, und damit ist D gleich weit von A, B, C entfernt.
g) $\alpha \approx 26.57°$, $\beta \approx 108.43°$, $\gamma = 45°$. So genau messen kann man die Winkel natürlich nicht, die Summe kann daher etwas kleiner oder grösser als die eigentlich exakten $180°$ sein.
i) Ja, weil $\sphericalangle DFA = 90°$ über dem Kreisdurchmesser $[DA]$ steht. Damit ist k_2 ein Thaleskreis auf dem alle rechten Winkel mit Schenkeln durch A, D liegen.
j) In dieser speziellen Situation ja. Würde man den Punkt C weiter auf BC verschieben, würde sich $[DF]$ ändern, aber $[AF]$ nicht.

Lösung zu Aufgabe 4.8 ex-geometrische-oerter3



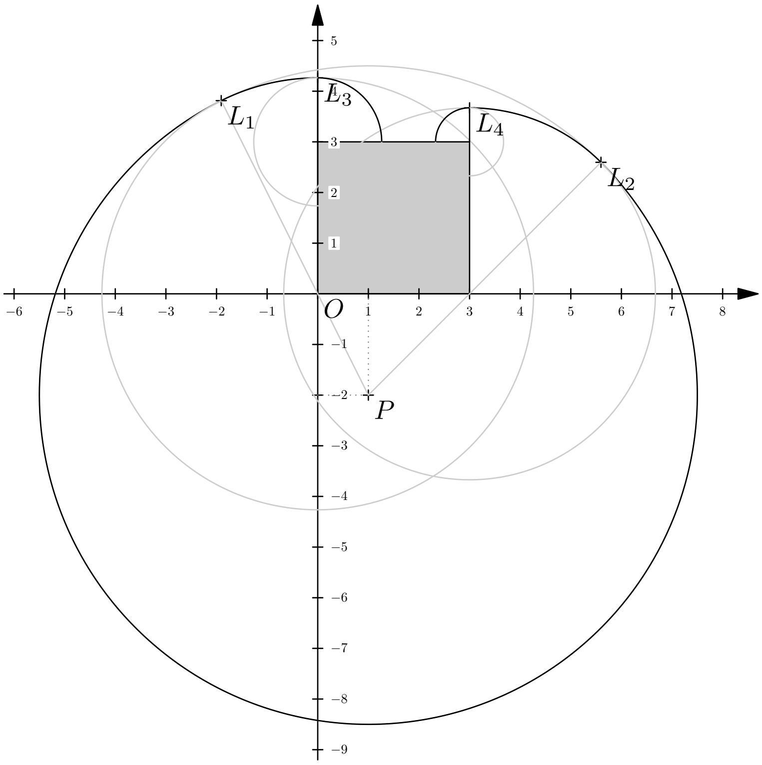
a) Für das Kreiszentrum Z gilt: $\overline{Zg} = \overline{Zh}$ (Kreis berührt die Geraden) und $ZC \perp h$ (berührt h in C). Das ergibt 2 geometrische Örter für Z.

b) Der erste geometrische Ort ist m_{AC}. Der zweite geometrische Ort ist die ganze Fläche zwischen w_{gh}^1 und w_{gh}^2 in der g enthalten ist. Deren Schnitt ergibt eine Strecke.

c) Der erste geometrische Ort ist die *Halbebene*, die B enthält und durch die Gerade m_{BC}, begrenzt ist. Der zweite geometrische Ort ist die ganze Fläche zwischen w_{gh}^1 und w_{gh}^2 in der h enthalten ist. Deren Schnitt ergibt eine Fläche.

1.	w_{gh}^1, w_{gh}^2	$\rightarrow$ 1.g.O.f.Z
2.	$\perp$ zu h durch C	$\rightarrow$ 2.g.O.f.Z, Z_1, Z_2
3.	$k(Z_1, \overline{Z_1,C})$, $k(Z_2, \overline{Z_2,C})$	$\rightarrow$ 2 Lösungen zu a)
4.	$m_{AC} \cap w_{gh}^1$, $m_{AC} \cap w_{gh}^2$	$\rightarrow$ $[L_1, L_2]$, Lösung zu b)
5.	$m_{BC} \cap w_{gh}^1$, $m_{BC} \cap w_{gh}^2$	$\rightarrow$ H_1, H_2
6.	Schraffierte Fläche	$\rightarrow$ Lösung zu c)

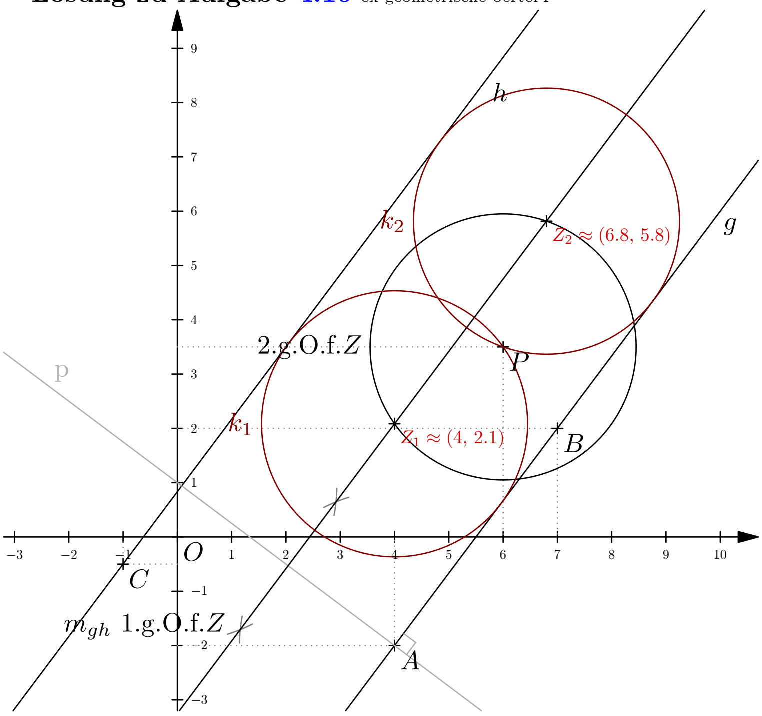
Lösung zu Aufgabe 4.9 ex-geometrische-oerter-ziege-ums-haus



Die Eckpunkte des Hauses werden vom Nullpunkt aus im Gegenuhrzeigersinn mit H_1, H_2, H_3 und H_4 bezeichnet.

1. $k(P, 6.5)$ $\rightarrow k_1$
2. $k_1 \cap PH_1$ und $k_1 \cap PH_2$ $\rightarrow L_1$ und L_2
3. $k(H_0, \overline{H_1L_1})$ und $k(H_1, \overline{H_1L_2})$ $\rightarrow k_2$ und k_3
4. $k_2 \cap H_1H_4$ und $k_3 \cap H_2H_3$ $\rightarrow L_3$ und L_4

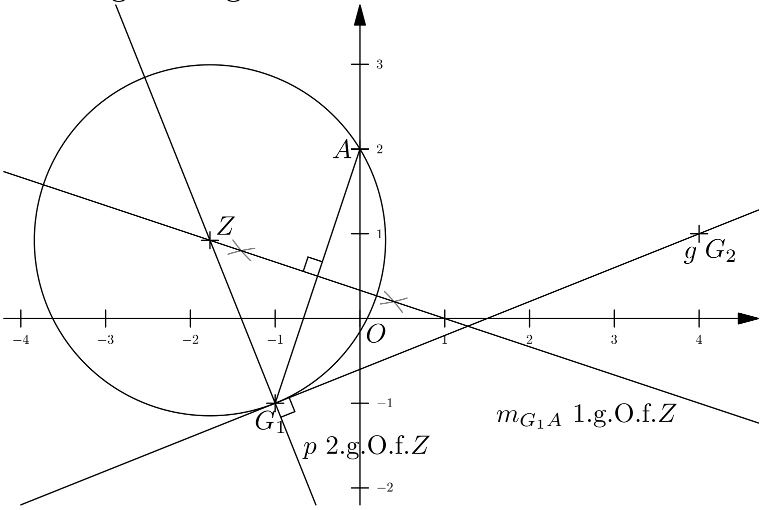
Lösung zu Aufgabe 4.10 ex-geometrische-oerter4



Es wird zuerst das Kreiszentrum Z konstruiert. Es gilt $\overline{Zg} = \overline{Zh}$. Der Kreisradius muss $\frac{1}{2}\overline{gh}$ sein, und damit $\overline{ZP} = \frac{1}{2}\overline{gh}$.

1. Mittelparallele m_{gh} $\rightarrow$ 1.g.O.f.Z
2. $k = k(P, \frac{1}{2}\overline{gh})$ $\rightarrow$ 2.g.O.f.Z
3. $m_{gh} \cap k$ $\rightarrow$ Z_1, Z_2
4. $k(Z_1, \frac{1}{2}\overline{gh})$, $k(Z_2, \frac{1}{2}\overline{gh})$ $\rightarrow$ 2 Lösungen

Lösung zu Aufgabe 4.11 ex-geometrische-oerter1

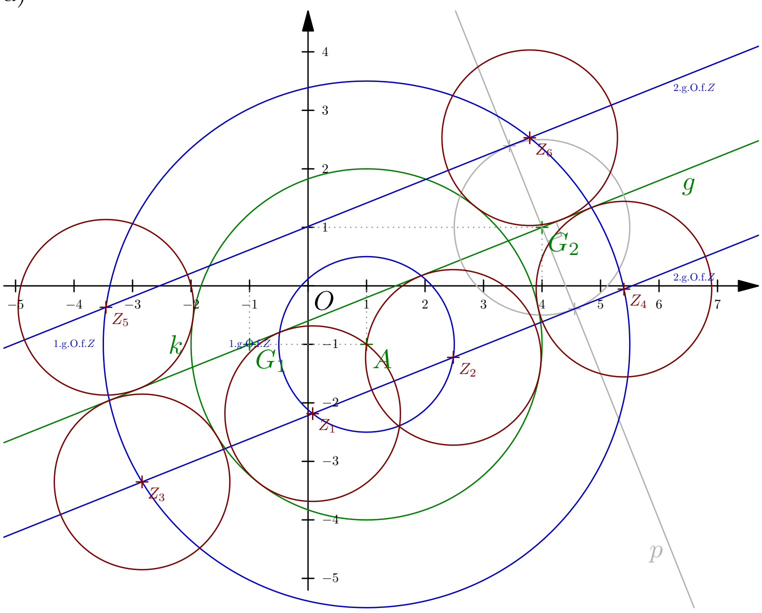


Man konstruiert zuerst das gesuchte Kreiszentrum Z, das folgende Bedingungen erfüllen muss: $\overline{ZA} = \overline{ZG_1}$ und $\overline{Zg} = \overline{ZG_1}$, bzw. $ZG_1 \perp g$ (damit der gesuchte Kreis die Gerade g im Punkt G_1 berührt).

1. m_{G_1A} $\rightarrow$ 1.g.O.f.Z
2. $\perp$ zu g durch G_1 $\rightarrow$ 2.g.O.f.Z
3. $k(Z, \overline{ZG_1})$ $\rightarrow$ 1 Lösung

Lösung zu Aufgabe 4.12 ex-geometrische-oerter2

a)



Man konstruiert das gesuchte Kreiszentrum Z:

1. $k_1 = k(M, r_1 - r_2)$ und $k_2 = k(M, r_1 + r_2)$ $\rightarrow$ 1.g.O.f.Z
2. Parallelenpaar p_1, p_2 zu g im Abstand r_2 $\rightarrow$ 2.g.O.f.Z
3. $(k_1 \cup k_2) \cap (p_1 \cup p_2)$ $\rightarrow$ 6 Lösungen.

b*) Es kann zwischen 0 und 8 Lösungen geben.

0 Lösungen wenn $\overline{kg} > 2r$, wobei $\overline{kg} = \overline{Mg} - r_1$.

1 Lösung wenn $\overline{kg} = 2r$.

2 Lösungen wenn $\overline{kg} < 2r$ und $g \cap k = \varnothing$.

3 Lösungen wenn g Tangente an k und $r_2 > r_1$.

4 Lösungen wenn g Tangente an k ist und $r_2 \leq r_1$, oder wenn $\overline{Mg} < r_1$ und $r_2 > r_1$.

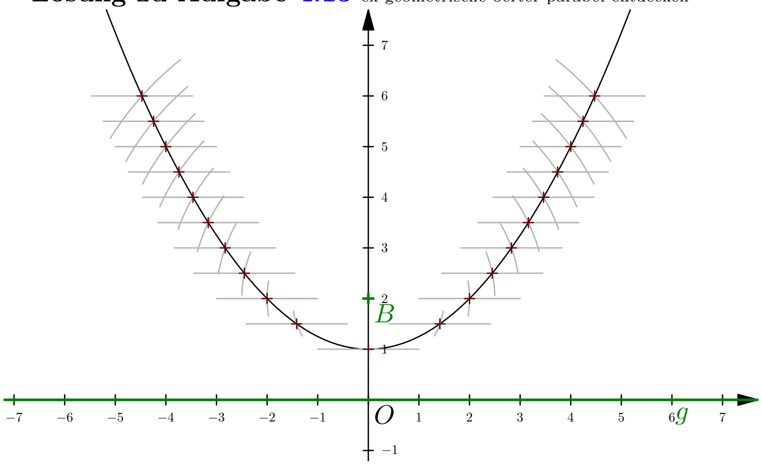
5 Lösungen wenn $\overline{Mg} = r_1 - r_2$ (und damit $r_1 > r_2$).

7 Lösungen wenn $r_2 < 2r_1$ und $\overline{gM} + r_2 = r_1$.

8 Lösungen wenn $r_2 < 2r_1$ und $\overline{gM} + r_2 < r_1$.

6 Lösungen sonst.

Lösung zu Aufgabe 4.13 ex-geometrische-oerter-parabel-entdecken

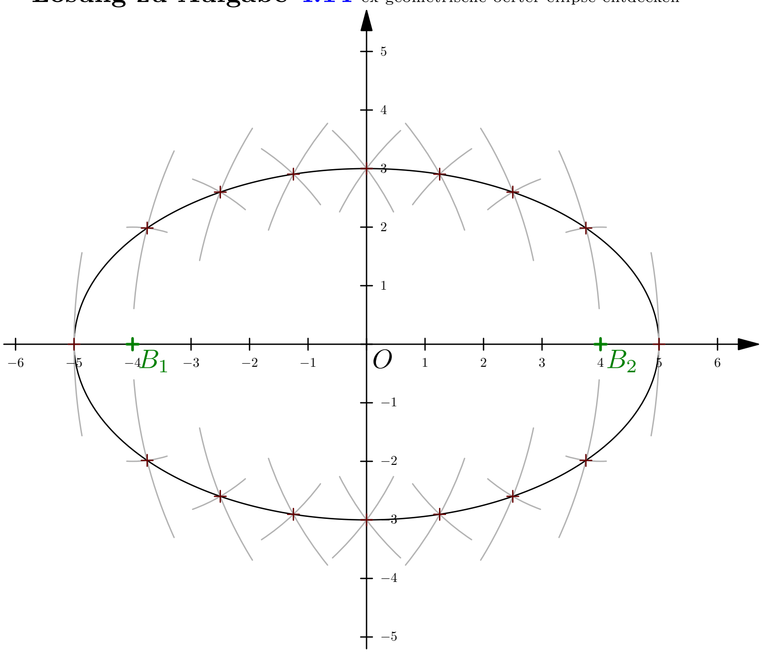


Für alle halbzahligen d wird folgende Konstruktion durchgeführt:

1. Parallele zu g im Abstand d $\rightarrow p$
2. $k(B,d) \cap p$ $\rightarrow P_1,\ P_2$ (ausser für $d = 1$ nur ein Punkt

Die entstehende Kurve (eine Parabel) ist rund und hat nirgends einen Knick!

Lösung zu Aufgabe 4.14 ex-geometrische-oerter-ellipse-entdecken



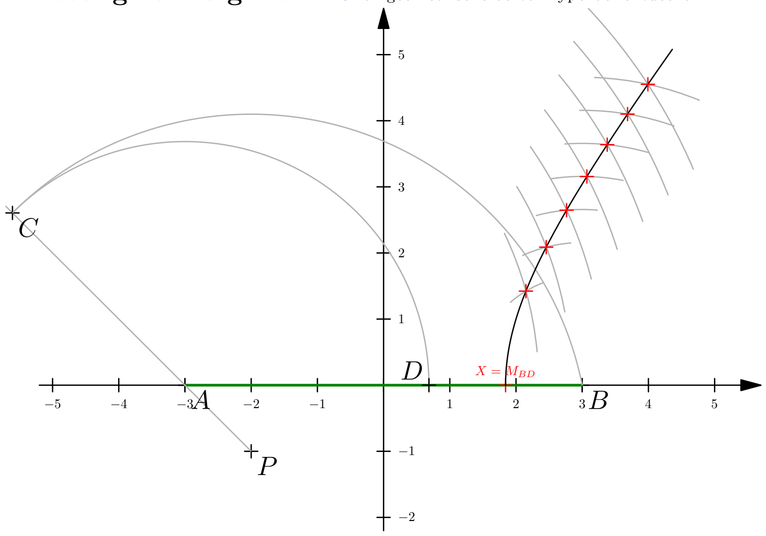
Für alle ganzzahligen d von 1 bis 9 wird folgende Konstruktion durchgeführt:

1. $k(B_1, d) \cap k(B_2, 10 - d)$ $\rightarrow$ 2 Punkte (ausser für $d = 1$ und $d = 9$)

Die entstehende Kurve (eine Ellipse) ist rund und hat nirgends einen Knick!

Schlägt man bei B_1 und B_2 zwei Nägel ein und legt eine Fadenschlaufe der Länge $10+\overline{B_1B_2}=10+8=18$ um die Nägel, kann mit einem Stift, der die Schlaufe spannt, die Ellipse gezeichnet werden.

Lösung zu Aufgabe 4.15 ex-geometrische-oerter-hyperbel-entdecken



Zuerst wird der Punkt D auf $[AB]$ konstruiert, der via A gleich weit von P entfernt ist, wie der Punkt B. Der Mittelpunkt von D und B ist dann X:

1. $k(P,\overline{PB})\cap[PA \quad \to C$
2. $k(A,\overline{AC})\cap[AB] \quad \to D$
3. $M_{BD} \quad \to X$

Für alle halbzahligen d von 0.5 bis 4 wird folgende Konstruktion durchgeführt:

1. $k(A,d+\overline{AX})\cap k(B,d+\overline{BX}) \quad \to$ 1 Punkt oberhalb AB

Die entstehende Kurve (ein halber Hyperbelast) ist rund und hat nirgends einen Knick! Die Tangente an die Hyperbel in X ist vertikal.

Man beachte dass für alle Punkte P auf der Hyperbel folgendes gilt: $\overline{AP}-\overline{BP}=\overline{AX}-\overline{BX}$.

Lösung zu Aufgabe 4.16 ex-geometrische-oerter-ellipse1

Damit überhaupt ein Dreieck gezeichnet werden kann muss $\ell \geq 2\overline{AB}$ sein. Ansonsten ist der geometrische Ort die leere Menge $\varnothing$.

Es gilt also $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\ell$, bzw. $\overline{AC}+\overline{BC}=\ell-\overline{AB}$ und damit ist der geometrische Ort aller Punkte C eine Ellipse mit Brennpunkten A und B und Abstandssumme $\ell-\overline{AB}$.

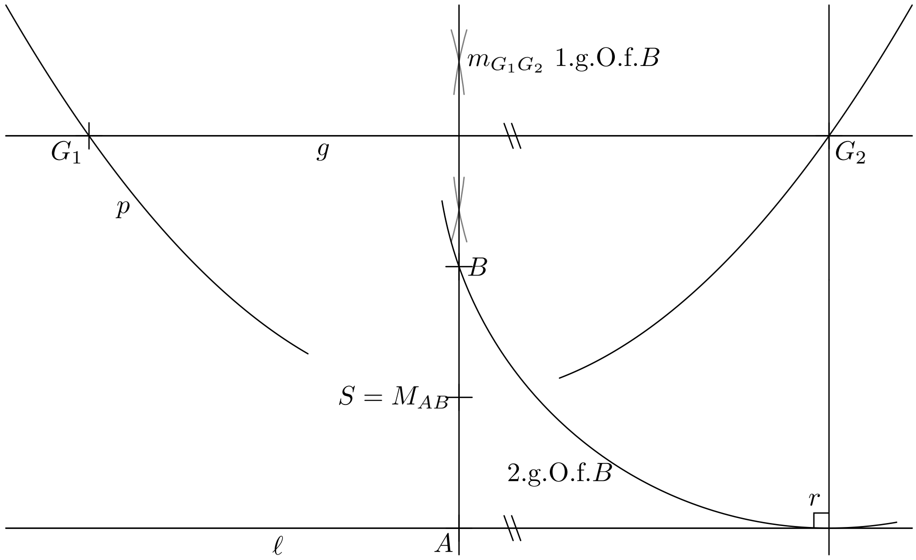
Lösung zu Aufgabe 4.17 ex-geometrische-oerter-parabel1

a) Da g Tangente an die Kreise ist und der Berührungspunkt P auf g ist, ist der geometrische Ort die Rechtwinklige zu g durch P.

b) Für die Kreiszentren Z gilt: $\overline{ZP}=\overline{Zg}$. Damit ist der gesuchte geometrische Ort eine Parabel mit Brennpunkt P und Leitlinie g.

Lösung zu Aufgabe 4.18 ex-geometrische-oerter-parabel2

Zuerst wird die Symmetrieachse a der Parablel konstruiert. Es gilt: $B\in a$. Danach wird ein Punkt $Q\in p$ gewählt und die Bedingung $\overline{Q\ell}=\overline{QB}$ genutzt.



1. Wähle G_1 auf p $\rightarrow G_1$
2. Parallele zu ℓ durch G_1 $\rightarrow g$
3. $g \cap p$ $\rightarrow G_2$
4. $m_{G_1G_2}$ $\rightarrow$ 1.g.O.f.B
5. $k(G_2, \overline{G_2\ell})$ $\rightarrow$ 2.g.O.f.B
6. $m_{G_1G_2} \cap \ell$ $\rightarrow A$
7. M_{AB} $\rightarrow$ Scheitel S

Lösung zu Aufgabe 4.19 ex-geometrische-oerter-ellipse2

Seien A, B die Schnittpunkte $e \cap g$, und C, D die Schnittpunkte $e \cap h$ und $M = g \cap h$.
Seien B_1 und B_2 die unbekannten Brennpunkte auf g, symmetrisch zu $M = g \cap h$, d.h.

$$\overline{AB_1} = \overline{BB_2}.$$

Für jeden Punkt $P \in e$ gilt:

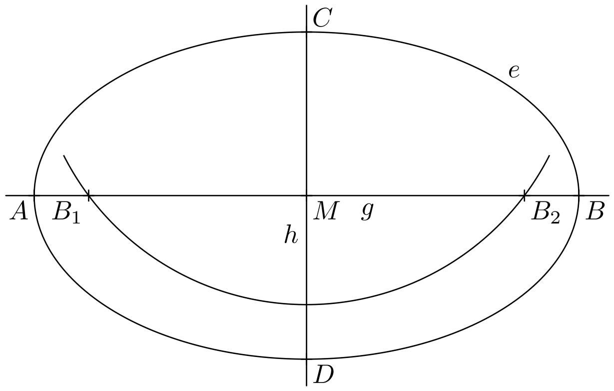
$$\overline{B_1P} + \overline{B_2P} = s \quad \text{(konstante Abstandssumme)}$$

Insbesondere gilt dies für den Punkt A, also

$$s = \overline{AB_1} + \overline{AB_2} = \overline{AB_1} + \overline{AB_1} + \overline{B_1B_2} = \overline{AB_1} + \overline{B_2B} + \overline{B_1B_2} = \overline{AB}$$

Damit ist die Abstandssumme s bekannt. Aus Symmetriegründen gilt $\overline{CB_1} = \overline{CB_2}$ und damit $\overline{CB_1} = \frac{1}{2}s = \overline{AM}$.
Damit ist die Konstruktionsbeschreibung wie folgt:

1. $k(C, \overline{MA}) \cap g$ $\rightarrow B_1$, B_2



Lösung zu Aufgabe 4.20 ex-geom-ort-kegelschnitte1

a) Es gilt $\overline{B_1P_1} + \overline{P_1B_2} = d$ also $\overline{P_1B_2} = d - \overline{B_1P_1}$. Analog dazu gilt $\overline{P_2B_2} = d - \overline{B_1P_2}$.

1. $k(P_1, d - \overline{B_1P_1})$ $\rightarrow k_1$, 1.g.O.f.B_2
2. $k(P_2, d - \overline{B_1P_2})$ $\rightarrow k_2$, 2.g.O.f.B_2
3. $k_1 \cap k_2$ $\rightarrow$ 2 Lösungen

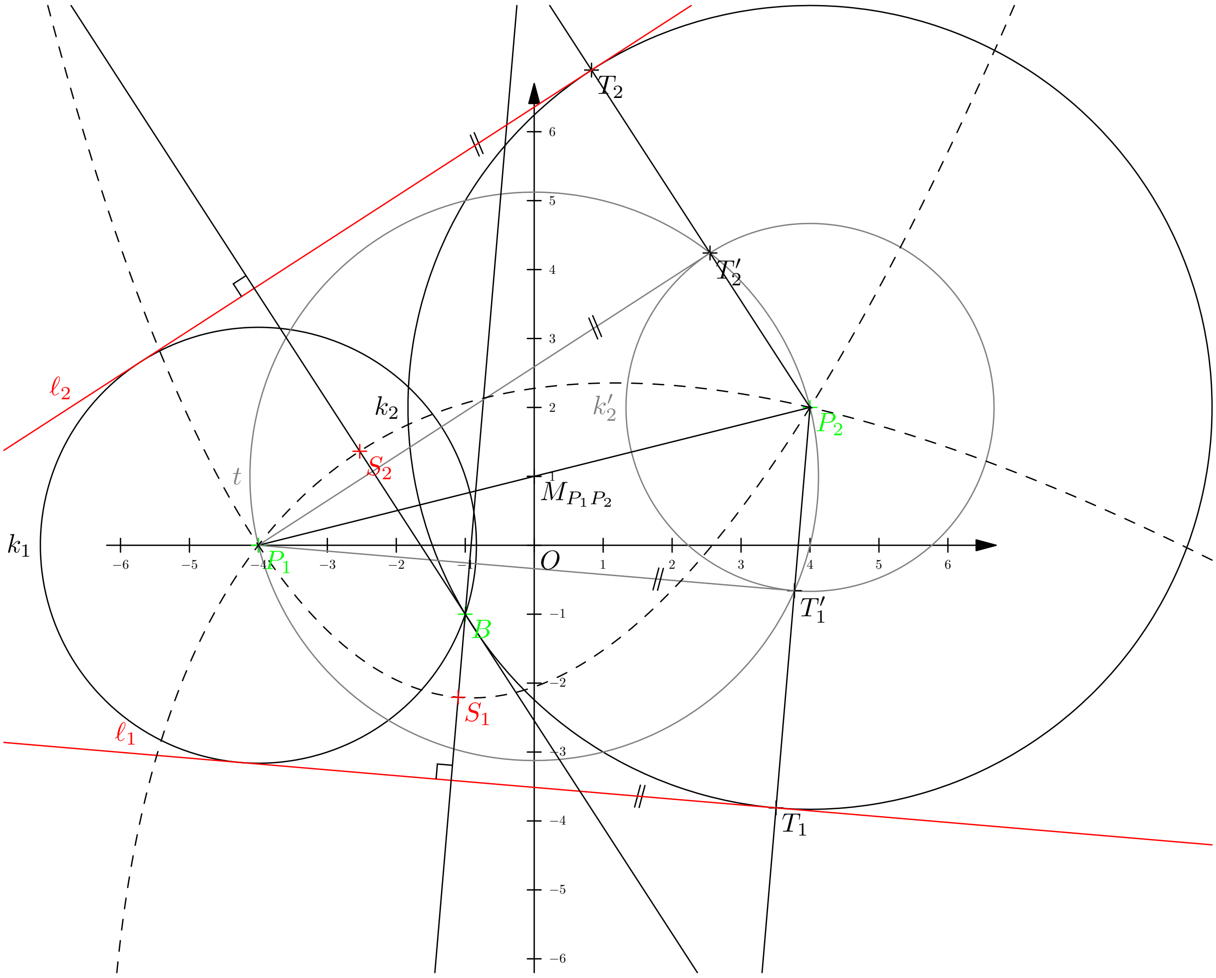
b)

$$\overline{B_1P_1} + \overline{P_1B_2} = \overline{B_1P_2} + \overline{P_2B_2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \overline{P_1B_2} - \overline{P_2B_2} = \overline{B_1P_2} - \overline{B_1P_1}$$

Die rechte Seite ist konstant, die linke Seite die Differenz der Abstände von B_2 zu zwei gegebenen Punkten P_1 und P_2. Alle Punkte B_2 liegen also auf einem Hypbel-Ast mit Brennpunkten P_1 und P_2 und Abstandsunterschied $\overline{B_1P_2} - \overline{B_1P_1}$.

Lösung zu Aufgabe 4.21 ex-geom-ort-kegelschnitte3

Es gilt $\overline{P_1B} = P\ell$ und damit muss ℓ den Kreis $k(P_1, \overline{P_1B})$ berühren. Analog dazu für P_2. Die Leitlinien sind also gemeinsame Tangenten an diese beiden Kreise. Da sich die Kreise schneiden (in B), gibt es nur zwei solche Tangenten und damit 2 Lösungen.



1. $k(P_1, \overline{P_1B}$ $\rightarrow k_1$
2. $k(P_2, \overline{P_2B}$ $\rightarrow k_2$
3. $k(P_2, \overline{P_2B} - \overline{P_1B}$ $\rightarrow k_2'$
4. Thaleskreis über $[P_1P_2]$ $\rightarrow t$
5. $t \cap k_2'$ $\rightarrow T_1', T_2'$
6. $[P_2T_1' \cap k_2$ $\rightarrow T_1$
7. $[P_2T_2' \cap k_2$ $\rightarrow T_2$
8. $\parallel$ zu P_1T_1' durch T_1 $\rightarrow \ell_1$
9. $\parallel$ zu P_1T_2' durch T_2 $\rightarrow \ell_2$
10. $M_{B\ell_1}$ $\rightarrow S_1$
11. $M_{B\ell_2}$ $\rightarrow S_2$

Lösung zu Aufgabe 4.23 ex-winkelsaetze-geraden1

a)

$\sphericalangle DAB = 88°$ (Ergänzungswinkel an Parallelen).
$\triangle ACD$ ist gleichschenklig damit ist $\sphericalangle DAC = \sphericalangle ACD = (180° - \sphericalangle CDA)/2 = (180° - 92°)/2 = 44°$.
Damit ist $\sphericalangle CAB = \sphericalangle DAB - \sphericalangle DAC = 88° - 44° = 44°$.
δABC ist gleichschenlig und damit $\alpha = (180° - \sphericalangle CAB)/2 = (180° - 44°)/2 = 136°/2 = 68°$.

Antwort: $\alpha = 68°$.

b)

$\delta = 180° - 82° = 98°$ (Ergänzungswinkel).
$\gamma = 180° - 40° = 140°$ (Ergänzungswinkel).
$\alpha = 180° - \frac{1}{2}\delta - \frac{1}{2}\gamma = 180° - 49° - 70° = 61°$. (Winkelsumme im $\triangle$).

Antwort: $\alpha = 61°$.

c)

$\sphericalangle BDC = 42°$ (Stufenwinkel).
$\sphericalangle ADB = 180° - 2 \cdot 42° = 96°$ (gleichschenkliges $\triangle ABD$ mit Basis $[AB]$).
$\sphericalangle ADC = \sphericalangle ADB + \sphericalangle BDC = 96° + 42° = 138°$.
$\sphericalangle ACD = \frac{1}{2} \cdot (180° - \sphericalangle ADC) = \frac{1}{2} \cdot (180° - 138°) = \frac{1}{2}42° = 21°$. (gleichschenkliges $\triangle ACD$ mit Basis $[AC]$).
$\sphericalangle DFC = 180° - \sphericalangle FDC - \sphericalangle FCD = 180° - 42° - 21° = 117°$ (Winkelsumme im $\triangle DFC$).
$\alpha = 180° - \sphericalangle DFC = 180° - 117° = 63°$

Antwort: $\alpha = 63°$.

Alternative: $\alpha = \sphericalangle ABD + \sphericalangle DCF$. Man denke sich eine dritte Parallele durch F und α als Summe zweier Stufenwinkel.

Lösung zu Aufgabe 4.24 ex-winkelsaetze-geraden2

Seien g, h zwei sich schneidende Geraden mit $\sphericalangle(g, h) = \alpha$. Sei $\beta = 180° - \alpha$ der Nebenwinkel von α. Damit gilt

$$\sphericalangle(w^1_{gh}, g) = \frac{\alpha}{2} \qquad \text{und} \qquad \sphericalangle(w^2_{gh}, g) = \frac{\beta}{2}$$

und damit

$$\sphericalangle(w^1_{gh}, w^2_{gh}) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$$

Es gilt $\alpha + \beta = 180°$ und damit $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90°$, was zu beweisen war.

Lösung zu Aufgabe 4.25 ex-winkelsaetze-geraden3

a) $\alpha = (180° - \gamma)/2 = 70°$.

b) $180° = \alpha + \beta + \gamma = \alpha + \alpha + 3\alpha = 5\alpha$ also $\alpha = 36°$.

c) $\alpha = 180° - (\beta + \gamma) = 40°$.

d) $180° = \alpha + \beta + \gamma = \alpha + \alpha + \alpha = 3\alpha$ also $\alpha = 60°$.

Lösung zu Aufgabe 4.26 ex-winkelsaetze-geraden4

Sei $I = w_\alpha \cap w_\beta$. Es gilt:

$$\sphericalangle AIB = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} \quad \text{Innenwinkelsumme im } \triangle$$

Der gesuchte Winkel δ ist der Nebenwinkel von $\sphericalangle AIB$, also

$$\delta = 180° - (180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}.$$

Man hätte dies auch direkt aufschreiben können, da der Aussenwinkel in einem Dreieck immer die Summe der gegenüberliegenden Innenwinkel ist.

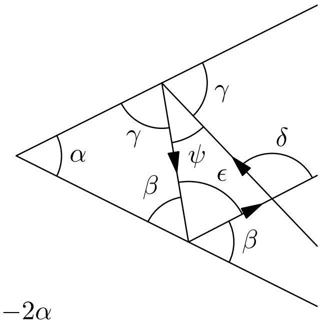
In jedem Dreieck gilt:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90° \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90° - \frac{\gamma}{2}$$

Und damit ist $\delta = \sphericalangle(w_\alpha, w_\beta) = 90° - \frac{\gamma}{2}$.

Lösung zu Aufgabe 4.27 ex-winkelsaetze-geraden5

Für den Aussenwinkel δ gilt:



$$\delta = \epsilon + \psi$$

Mit $\epsilon = 180° - 2\beta$ und $\psi = 180° - 2\gamma$. Und damit

$$\delta = \epsilon + \psi = 180° - 2\beta + 180° - 2\gamma = 360° - (2\beta + 2\gamma)$$

Es gilt

$$\alpha+\beta+\gamma = 180° \quad \Leftrightarrow \quad 2\alpha+2\beta+2\gamma = 360° \quad \Leftrightarrow \quad 2\beta+2\gamma = 360°-2\alpha$$

Oben eingesetzt erhält man

$$\delta = 360° - (360° - 2\alpha) = 2\alpha$$

Lösung zu Aufgabe 4.28 ex-winkelsaetze-geraden6

a) Das Dreieck $\triangle MBC$ ist gleichschenklig, also ist $\sphericalangle MCB = \beta$.
Es gilt

$$\overline{CD} = \overline{CM} = \overline{MA} = \overline{MD}$$

und damit ist $\triangle MCD$ gleichseitig und alle Innenwinkel gleich $60°$.
Somit gilt:

$$\sphericalangle MCD = \beta + \gamma = 60° \qquad \Leftrightarrow \qquad \gamma = 60° - \beta.$$

b) Wenn $\beta = \gamma$ sind dies Wechselwinkel (Scheitelwinkel zu Stufenwinkel) und damit $CD \parallel AB$. Eingesetzt in obige Gleichung:

$$\beta = 60° - \beta \qquad \Leftrightarrow \qquad 2\beta = 60° \qquad \Leftrightarrow \qquad \beta = 30°.$$

Lösung zu Aufgabe 4.29 ex-winkelsaetze-geraden7

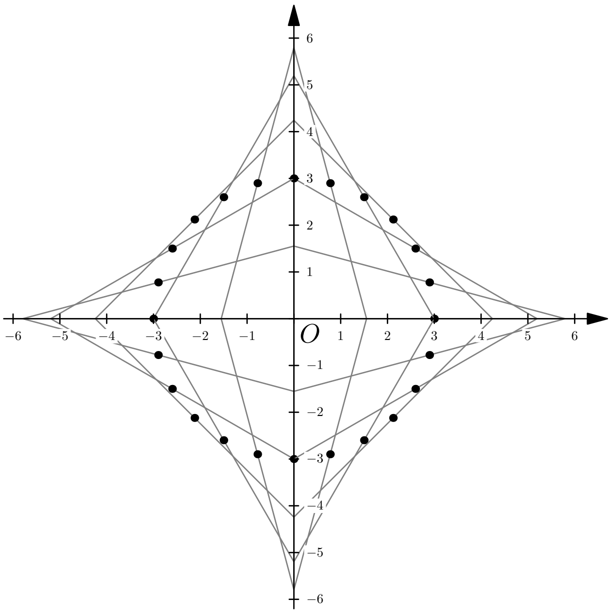
Das Dreieck $\triangle MBC$ ist gleichschenklig und damit ist $\sphericalangle MCB = \beta$. Damit ist p die Mittelsenkrechte zu BC und Winkelhalbierende vom $\sphericalangle CMB$. Damit ist $M_{CD} = a \cap p$. Im Dreieck $\triangle CMM_{BC}$ gilt

$$\mu = 180° - 90° - \beta = 90° - \beta$$

Das Dreieck $\triangle MCD$ ist gleichschenklig mit Basis $[CD]$. Damit ist $\sphericalangle MDC = (180° - \mu)/2 = (180° - (90° - \beta))/2 = (90° + \beta)/2 = 45° + \frac{\beta}{2}$.
Im Dreieck $\triangle CM_{BC}D$ gilt:

$$\gamma = 180° - 90° - \sphericalangle MDC = 90° - (45° + \frac{\beta}{2}) = 45° - \frac{\beta}{2}$$

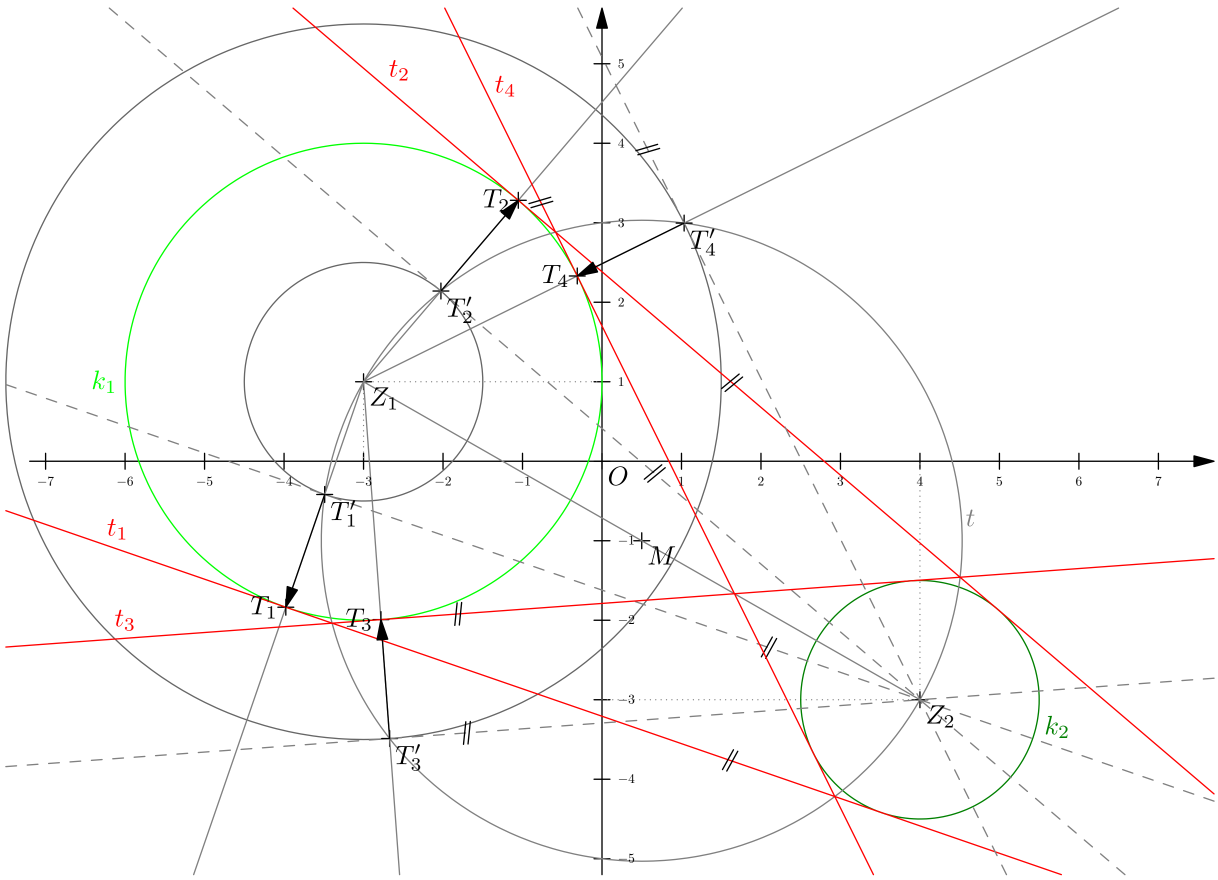
Lösung zu Aufgabe 4.31 ex-thaleskreis-leiter



M_{AB} ist der Mittelpunkt der Stecke $[AB]$, über der der Nullpunkt des Koordinatensystem ein rechter Winkel bildet. D.h. O liegt auf dem Thaleskreis über $[AB]$ und somit $\overline{OM} = \overline{AM_{AB}}$.
Damit ist bewiesen, dass alle Punkte M_{AB} auf einem Kreis um O liegen.

Lösung zu Aufgabe 4.32 ex-tangenten-an-zwei-kreise

1. Thaleskreis über $[Z_1Z_2]$ $\rightarrow t$
2. $k(Z_1, r_1 - r_2) \cap t$ $\rightarrow T'_1$, T'_2
3. $[Z_1T'_{1,2} \cap k_1$ $\rightarrow T_{1,2}$
4. $k(Z_1, r_1 + r_2) \cap t$ $\rightarrow T'_3$, T'_4
5. $[Z_1T'_{3,4} \cap k_1$ $\rightarrow T_{3,4}$
6. Paralellen zu $Z_2T'_{1,2,3,4}$ durch $T_{1,2,3,4}$ $\rightarrow t_{1,2,3,4}$



Lösung zu Aufgabe 4.33 ex-thaleskreis-hoehenfusspunkte

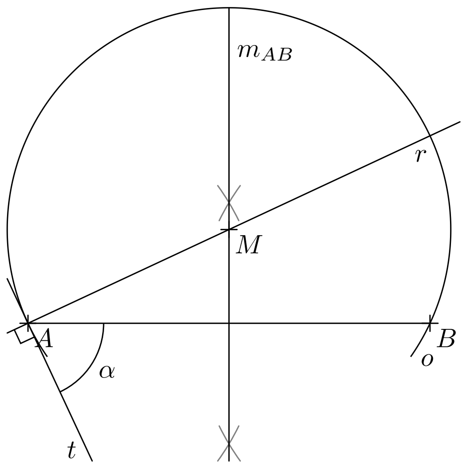
H_a und H_b sind Scheitel von rechten Winkeln über der Strecke $[AB]$, also liegen beide auf dem Thaleskreis über

$[AB]$. Somit gilt $\overline{M_{AB}H_a} = \overline{M_{AB}H_b} = \overline{M_{AB}A}$, was zu beweisen war.

Lösung zu Aufgabe 4.35 ex-geom-ort-ortsbogen0

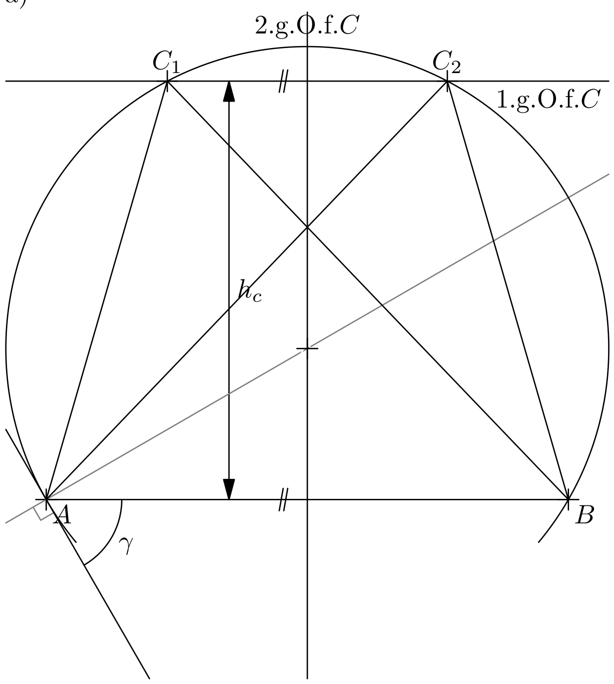
Es gilt: Der Peripheriewinkel ist gleich dem Sehnen-Tangenwinkel. Die Tangente kann also konstruiert werden, indem der Winkel γ an der Strecke $[AB]$ abgetragen wird. Das gesuchte Ortsbogenzentrum muss einerseits auf der Rechtwinkligen dazu liegen, andererseits auf der Mittelsenkrechte m_{AB}.

1. Winkel α bei A abtragen $\rightarrow$ Tangente t
2. $\perp$ zu t durch A $\rightarrow r$
3. $m_{AB} \cap r$ $\rightarrow M$
4. $k(M, \overline{MA})$ $\rightarrow$ Gesuchter Ortsbogen



Lösung zu Aufgabe 4.36 ex-geom-ort-ortsbogen1

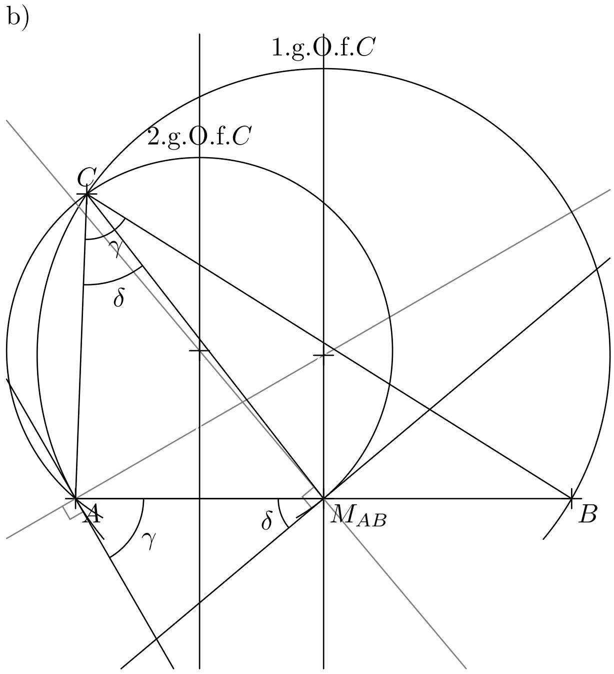
a)



1. $\parallel$ zu AB im Abstand h_c $\rightarrow$ 1.g.O.f.C
2. Ortsbogen zu γ über $[AB]$ $\rightarrow$ 2.g.O.f.C

Es gibt 2 Lösungen (die 2 an AB gespiegelten Lösungen mit anderem Umlaufsinn nicht mitgezählt).

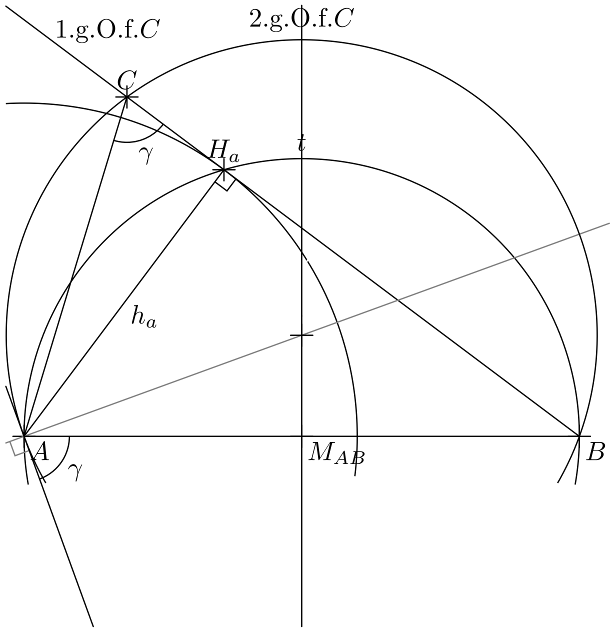
b)



1. Ortsbogen zu γ über $[AB]$ $\rightarrow$ 1.g.O.f.C
2. Ortsbogen zu δ über $[AM_{AB}]$ $\rightarrow$ 2.g.O.f.C

Es gibt 1 Lösung (die an AB gespiegelte Lösung mit anderem Umlaufsinn nicht mitgezählt).

c)



Zuerst wird der Höhenfusspunkt H_a konstruiert, womit man die Lage der Seite a erhält.

1. Thaleskreis über $[AB]$ $\rightarrow t$
2. $t \cap k(A, h_a)$ $\rightarrow H_a$
3. BH_a $\rightarrow$ 1.g.O.f.C
4. Ortsbogen zu γ über $[AB]$ $\rightarrow$ 2.g.O.f.C

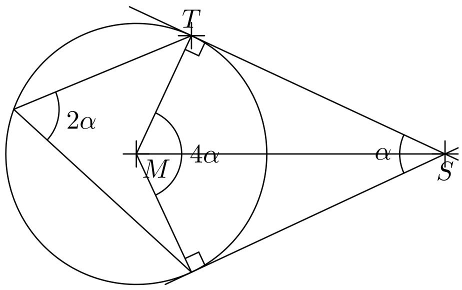
Es gibt 1 Lösung (die an AB gespiegelte Lösung mit anderem Umlaufsinn nicht mitgezählt).

Lösung zu Aufgabe 4.37 ex-ortsbogen-aufgabe-beweisen

Sei t die gemeinsame Tangente an k_1 und k_2 im Punkt B. Der Winkel $\alpha = \sphericalangle(t, g)$ ist ein Sehnen-Tangenten-Winkel für beide Kreise über den Sehnen $[BT_1]$ und $[BT_2]$. Der andere Sehnen-Tangenten-Winkel $\sphericalangle(t_1, g)$ bzw. $\sphericalangle(t_2, g)$ ist gleich gross wie α. Damit haben wir in den Punkten T_1 und T_2 Wechselwinkel an der Geraden g und damit sind $t_1 \parallel t_2$.

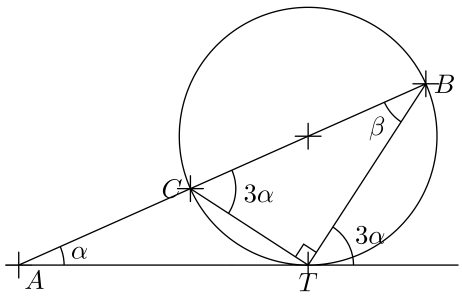
Lösung zu Aufgabe 4.38 ex-ortsbogen-winkel-berechnen-formell

a)



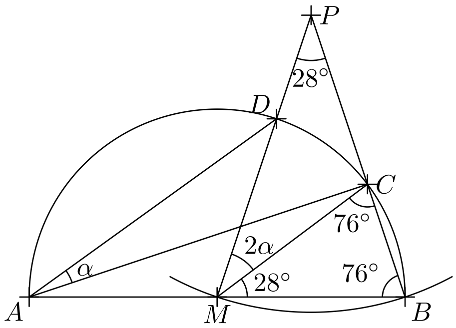
Der Zentriwinkel ist doppelt so gross wie der entsprechende Peripheriewinkel. MS halbiert die Winkel 4α und α.
Im $\triangle MST$ gilt: $180° = 90° + 2\alpha + \frac{1}{2}\alpha$, also $\frac{5}{2}\alpha = 90°$ und damit $\alpha = \frac{2}{5} \cdot 90° = 36°$.

b)



$\sphericalangle TCB = 3\alpha$ (Peripheriew. zum Sehnen-Tangenten-W.in T.)
$\sphericalangle CTB = 90°$ (Thaleskreis über $[BC]$).
$\sphericalangle CBT = \beta = 180° - 3\alpha - 90° = 90° - 3\alpha$
$\sphericalangle ATB = 180° - 3\alpha$ (Nebenwinkel).
Im $\triangle ATB$ gilt: $180° = \alpha + (180° - 3\alpha) + (90° - 3\alpha) = 270° - 5\alpha$
Nach α aufgelöst erhält man $\alpha = 18°$.

c)



$\sphericalangle PMC = 2\alpha$ (Zentriwinkel zum Peripheriewinkel α)
$\triangle PMB$ ist gleichschenklig mit Basis $[MB]$ und Basiswinkeln $(180° - 28°)/2 = 76°$.
$\triangle MBC$ ist gleichschenklig mit Basis $[BC]$ und damit ist der Winkel an der Spitze $\sphericalangle BMC = 28°$.
Somit gilt $\sphericalangle PMB = 76° = 2\alpha + 28°$. Also $2\alpha = 76° - 28° = 48°$ und damit $\alpha = 24°$.

Lösung zu Aufgabe 4.39 ex-ortsbogen-aufgabe-beweisen2

Hinweis: Dieser Beweis geht davon aus, dass $[AB]$ innerhalb des Dreiecks $\triangle BDC$ liegt:

Die Winkel $\sphericalangle BCD$ und $\sphericalangle BDC$ sind Peripheriewinkel über $[AB]$ und damit, unabhängig von g immer gleich gross. Damit ist auch der dritte Winkel im $\triangle BDC$ immer gleich gross, was zu beweisen war.

Wenn $[AB]$ ausserhalb des Dreiecks $\triangle BDC$ liegt, ist der Peripheriewinkel das Komplement zu 180° und ein Aussenwinkel des Dreiecks, womit der Innenwinkel wieder gleich gross ist.

Lösung zu Aufgabe 4.40 ex-ortsbogen-aufgabe-beweisen3-geogebra

Annahme: $[AC]$ und $[AD]$ sind die Diagonalen (andernfalls sind C und D zu vertauschen).

Die Winkel $\sphericalangle DAC$ und $\sphericalangle ADB$ sind Peripheriewinkel über den Sehnen $[DC]$ und $[AB]$. Diese Winkel sind immer gleich gross, auch wenn die Sehne $[CD]$ auf k wandert. Diese Winkel sind Innenwinkel im $\triangle AXD$ und damit ist der Winkel $\sphericalangle AXD$ auch immer gleich gross. Damit liegen alle möglichen Punkte X auf einem Ortsbogen über $[AB]$.

Lösung zu Aufgabe 4.41 ex-ortsbogen-winkel-berechnen-formell2

Diese Lösung ist für den Fall $\beta > \gamma$.

Sei $T = t \cap a$.

$\sphericalangle BAT = \gamma$ (Sehnen-Tangenten-Winkel zum Peripheriewinkel γ).

β ist Aussenwinkel im $\triangle ABT$ und damit $\beta = \gamma + \delta$ und somit $\delta = \beta - \gamma$.

Im Falle $\gamma = \beta$ gibt es keinen Schnittpunkt (der Winkel zwischen den Geraden ist dann 0°). Wenn $\gamma > \beta$ ist $\delta = \gamma - \beta$ mit ähnlicher Herleitung.

Lösung zu Aufgabe 4.42 ex-ortsbogen-winkel-berechnen-formell3

a) Sei $X = AD \cap CE$ der Diagonalenschnittpunkt.

Es gilt: $\sphericalangle CED = \beta$ (Peripheriewinkel über $[CD]$) und $\sphericalangle AEC = 90° - \alpha$ (Innenwinkelsumme im $\triangle AXE$). Und damit:

$\varepsilon = 90° - \alpha + \beta$

Analog erhält man $\gamma = 90° - \beta + \alpha$.

Im $\triangle EDC$ ist der Winkel bei E gleich gross wie β und der Winkel bei C gleich gross wie α (Peripheriewinkel über gleichen Sehnen). Damit ist

$\delta = 180° - \alpha - \beta$.

b) Der Winkel $\sphericalangle DZC = 2\beta$ ist Zentriwinkel zum Peripheriewinkel β über der Sehne $[CD]$ im kleinen Kreis. Dieser Winkel ist aber auch Peripheriewnkel über $[CD]$ im grossen Kreis. Peripheriewinkel auf gegenüberliegenden Seiten der Kreissehne ergänzen sich zu 180° (die entsprechenden Sehnen-Tangenten-Winkel sind Nebenwinkel). Also gilt folgende Beziehung zwischen α und β:

$$2\beta = 180° - \alpha$$

Hinweis: Die obige Beziehung kann natürlich auch umgeformt und nach α oder β aufgelöst werden.

Lösung zu Aufgabe 4.43 ex-ortsbogen-aufgabe-beweisen4

Sei $X = w_\gamma \cap u$, der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden w_γ mit dem Umkreis. Zu zeigen ist also, dass $X \in m_{AB}$.

Es gilt: $\sphericalangle ACX = \sphericalangle XCB = \frac{1}{2}\gamma$. Da beide Winkel Peripheriewinkel im Umkreis sind, müssen die entsprechenden Sehnen $[AX]$ und $[BX]$ gleich lang sein, d.h. $X \in m_{AB}$, was zu beweisen war.

Lösung zu Aufgabe 4.44 ex-geom-ort-kegelschnitte2

a) Der 1.g.O.f.Z_3 ist ein konzentrisches Kreispaar $k_{1,1} = k(Z_1, r_1 + r_3)$ und $k_{1,2} = k(Z_1, r_1 - r_3)$, wobei letzterer nur existiert, wenn $r_1 > r_3$.

Der 2.g.O.f.Z_3 ist ein konzentrisches Kreispaar $k_{2,1} = k(Z_2, r_2 + r_3)$ und $k_{2,2} = k(Z_2, r_2 - r_3)$, wobei letzterer nur existiert, wenn $r_2 > r_3$.

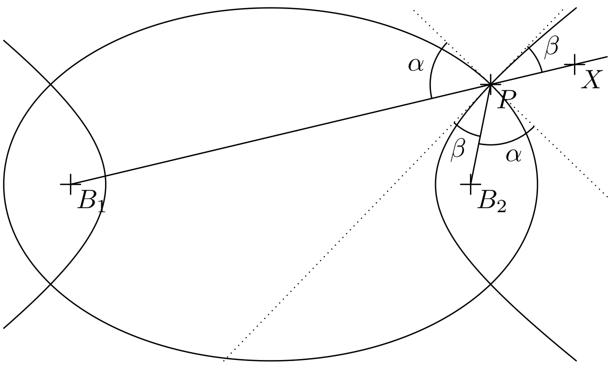
Die Schnittpunkte dieser beiden geometrischen Örter ergeben die möglichen Kreiszentren. Es kann zwischen 0 und 8 Lösungen geben (jeder Kreis kann mit den anderen beiden zwischen 0 und 4 Schnittpunkte bilden).

b) Die Kreise k_1 und k_2 schneiden sich nicht und liegen nicht ineinander. Der kleinste Kreis liegt also genau zwischen den beiden Kreisen. Das Kreiszentrum liegt also auf Z_1Z_2 und zwar genau in der Mitte zwischen den Schnittpunkten der Kreise mit $[Z_1Z_2]$.

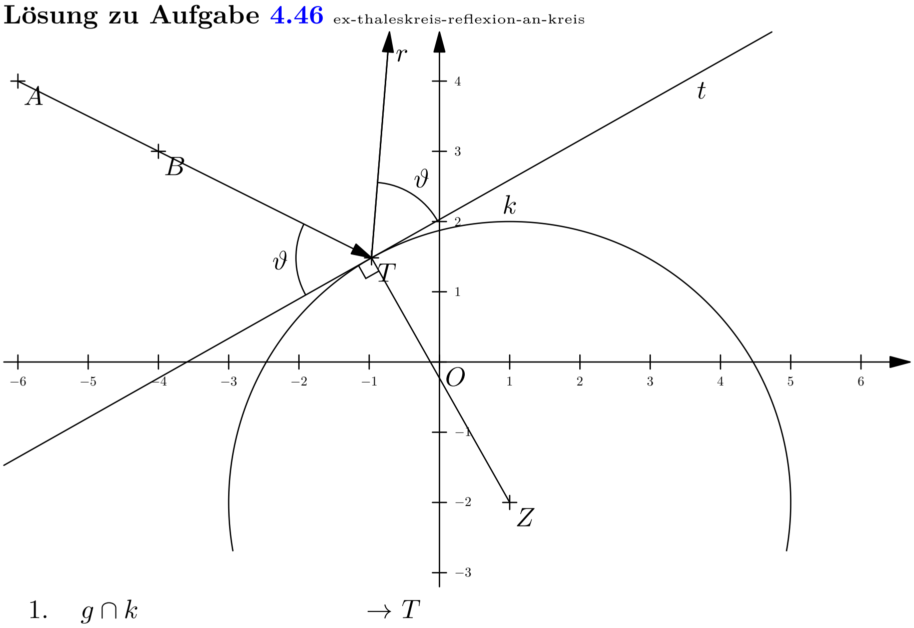
c) Es gilt $\overline{Z_3Z_1} = r_3 + r_1$ und $\overline{Z_3Z_2} = r_3 + r_2$. Man kennt zwar r_3 nicht, aber für die Differenz gilt: $\overline{Z_3Z_1} - \overline{Z_3Z_2} = (r_3 + r_1) - (r_3 + r_2) = r_1 - r_2$. Damit ist die Abstandsdifferenz zu zwei Punkten konstant, die Punkte Z_3 liegen also auf einem Hyperbelast mit Brennpunkten Z_1, Z_2 und Abstandsdifferenz $r_1 - r_2$.

Lösung zu Aufgabe 4.45 ex-geom-ort-kegelschnitte4

Seien B_1 und B_2 die gemeinsamen Brennpunkte und P ein Schnittpunkt der beiden Kurven.
Aus der Reflexionseigenschaft (Winkel α) in der Ellipse folgt, dass die Tangente an die Ellipse in P die äussere Winkelhalbierende vom $\sphericalangle B_1PB_2$ ist.
Analog bei der Hyperbel (Winkel β) folgt, dass die Tangente an die Hyperpel in P die äussere Winkelhalbierende vom $\sphericalangle B_2PX$ ist.
Da die Geraden B_1P und PX identisch sind, bilden die Tangenten das Winkelhalbierendenpaar zu den Geraden B_1P und B_2P und stehen somit senkrecht aufeinander, was zu beweisen war.

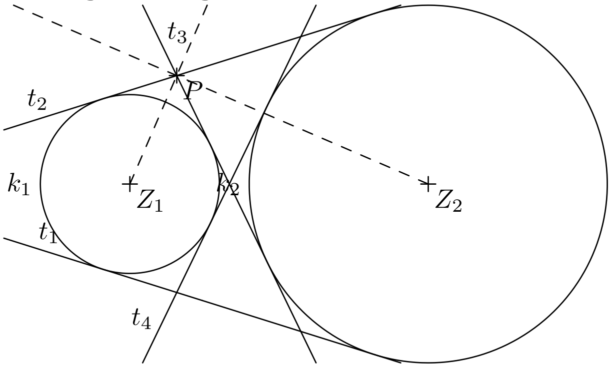


Lösung zu Aufgabe 4.46 ex-thaleskreis-reflexion-an-kreis



1. $g \cap k$ $\rightarrow T$
2. $\perp$ zu ZT durch T $\rightarrow$ Tangente t
3. $\vartheta = \sphericalangle(g, t)$ $\rightarrow$ Einfallswinkel θ (theta)
4. ϑ an t bei T abtragen $\rightarrow$ Lösung r

Lösung zu Aufgabe 4.47 ex-thaleskreis-schnittpunkte-gemeinsamer-tangenten



Der Beweis wird hier exemplarisch für den Punkt $P = t_2 \cap t_3$ geführt. Da t_2 und t_3 Tangenten an k_1 sind, halbiert Z_1P den Winkel $\sphericalangle(t_2, t_3)$. Analog teilt auch Z_2P den Winkel $\sphericalangle(t_2, t_3)$. D.h. Z_1P und Z_2P sind ein Winkelhalbierendenpaar und somit rechtwinklig aufeinander, was beweist, dass P auf dem Thaleskreis über $[Z_1Z_2]$ liegt.

Lösung zu Aufgabe 4.48 ex-geom-ort-winkelhalbierende

Ein Kreis, der zwei Geraden berührt, muss sein Zentrum Z auf der Winkelhalbierenden haben. Die Konstruktion des Kreiszentrums und des Kreises ist wie folgt:

1. c $\rightarrow$ 1.g.O.f.Z
2. w_γ $\rightarrow$ 2.g.O.f.Z
3. $\perp$ zu b durch Z $\rightarrow$ g
4. $g \cap b$ $\rightarrow$ Berührungspunkt P
5. $k(Z, \overline{ZP})$ $\rightarrow$ 1. Lösung

Lösung zu Aufgabe 4.49 ex-geometrische-oerter5

a)
1. w_{gh}^1, w_{gh}^2 $\rightarrow$ 1.g.O.f.Z
2. Parallelenpaar zu g im Abstand 1 $\rightarrow$ 2.g.O.f.Z

Es gibt 4 Lösungen.

b)
1. Kreise $k(M_1, 3 \pm 1)$ $\rightarrow$ 1.g.O.f.Z
2. Kreise $k(M_1, 2.5 \pm 1)$ $\rightarrow$ 2.g.O.f.Z

Es kann bis zu 8 Lösungen geben. Im konkreten Fall gibt es 6 Lösungen.

c)
1. Kreise $k(M, 3 \pm 1)$ $\rightarrow$ 1.g.O.f.Z
2. Parallelenpaar zu g im Abstand 1 $\rightarrow$ 2.g.O.f.Z

Es kann bis zu 8 Lösungen geben. Im konkreten Fall gibt es 7 Lösungen.

5 Polynome

Aufgabe 5.1 Studieren Sie folgende Definition Wort für Wort. Danach sollten Sie in eigenen Worten erklären können, was ein Monom ist, Beispiele dafür geben und für gegebene Ausdrücke entscheiden können, ob es sich um ein Monom handelt oder nicht.

Definition 5.1 Monom

Ein Monom ist ein Produkt aus einer reellen Zahl (dem **Koeffizienten**) und beliebig vielen **natürlichen Potenzen von Variablen** (dem **Namen** des Monoms).
Ist das Monom nur eine reelle Zahl, nennt man es auch eine **Konstante**.

Definition 5.2 Grad eines Monoms

Der Grad eines Monoms ist die Summe der Exponenten der Variablen.

Definition 5.3 Normalform eines Monoms

Der Koeffizient wird an erster Stelle geschrieben (Ausnahme ± 1), Potenzen gleicher Variablen werden zusammengefasst und Variablen werden alphabetisch geordnet.

Beispiele für Monome in Normalform:

0	Konstante, Grad 0	x	Koeffizient 1, Name x, Grad 1
$5x^4y$	Koeffizient 5, Name x^4y, Grad 5	$-\sqrt{2}uvz^2$	Koeffizient $-\sqrt{2}$, Name uvz^2, Grad 4

Aufgabe 5.2 Folgende Terme sind keine Monome in Normalform. Erklären Sie, warum. Formen Sie die Terme in Monome in Normalform um, wenn das möglich ist.

a) $4+3$ b) $a+b$ c) -4^2 d) x^2+x^2

e) $y+y^2$ f) 3^z g) $|v^2|$ h) $b \cdot 4a$

Definition 5.4 Polynom

Ein Polynom ist eine Summe von Monomen. Die einzelnen Summanden nennt man **Glieder**.
Hinweis: Die Summe kann auch aus nur einem Monom bestehen.

Definition 5.5 Grad eines Polynoms

Der Grad eines Polynoms ist der grösste Grad seiner Monome.

Beispiele für Polynome: x^2+5xy $a+b^{42}+1$ 7 $7x^7$ $u^2+2uv+v^2$ $-4y-2z$

Aufgabe 5.3 Begründen Sie kurz, warum folgende Terme keine Polynome sind. Formen Sie die Terme in Polynome um, falls möglich.

a) $4x\cdot(x^2-5y)$ b) $\frac{1}{4a^2-b}$ c) $|x-y|$ d) 3^x+4^y

Definition 5.6 Normalform eines Polynoms

Alle Monome sind in Normalform. Jeder Name kommt höchstens einmal vor.
Die Monome werden nach Grad **absteigend** geordnet. Monome gleichen Grades werden alphabetisch geordnet, wenn man die Potenzen als Produkte ausschreiben würde.
(Z.B. $a^3b^2 = aaabb$ wird vor $a^2b^3 = aabbb$ geschrieben).

Aufgabe 5.4 Schreiben Sie als Polynom in Normalform (es muss eventuell zuerst ausmultipliziert werden):

a) $3ab + 2a + 5ab + 3a - b$

b) $(x+2)\cdot x^2 - x\cdot(x-2) - 2\cdot(x-2)$

c) $5xy^2\left((3x)^2 + 3x^3y + 5y^2\right)$

d) $(g+2h^2)\cdot g + (h-2g)\cdot h$

5.1 Formeln

Merke Multiplikation zweier Polynome

Man multipliziert zwei Polynome miteinander, indem man jedes Glied des ersten Polynoms mit jedem Glied des zweiten Polynoms multipliziert und die Zwischenresultate addiert.

Aufgabe 5.5 Schreiben Sie in Normalform:

a) $(2a-3b+c)(a-b-a-c)$

b) $(x^3-y^3)(y^3+x^3)$

c) $(c+c^2+c^3+c^4)(c^3-c^2)$

d) $(a-x)(b-x)(c-x)\cdot\ldots\cdot(z-x)$

Aufgabe 5.6 Wie gross ist der Grad des Produkts zweier Monome?

Aufgabe 5.7 Wie gross ist der Grad des Produkts zweier Polynome?

Aufgabe 5.8 Was ist die Ausnahme der Regeln, die Sie bei Aufgaben 5.6 und 5.7 gefunden haben? Wie könnte man durch eine geeignete Definition des Grads eines Monoms diese Ausnahme «beheben»?

5.1.1 Binomische Formeln

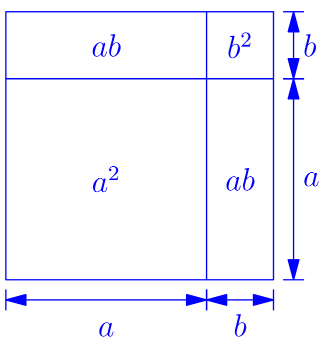
Ein **Binom** ist ein Polynom mit zwei Gliedern.

Merke Binomische Formeln

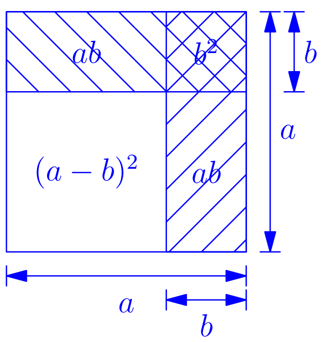
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Diese Formeln können durch einfache Polynom-Multiplikation bewiesen werden. Die Formeln können aber auch geometrisch einsichtig gemacht werden.

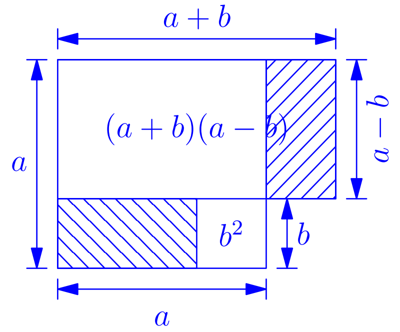
Skizze für $(a+b)^2$



Skizze für $(a-b)^2$



Skizze für $(a+b)(a-b)$



Aufgabe 5.9 Wenden Sie die binomischen Formeln an und schreiben Sie in Normalform:

a) $(xy + y^2)^2$ b) $\left(\frac{3}{4}a + \frac{4}{3}\right)^2$ c) $(2e + 3f)^2$ d) $\left(\sqrt{2}a + b\right)^2$

e) $(y - z)^2$ f) $\left(xy - y^2\right)^2$ g) $(4ef - 3fe)^2$ h) $\left(\frac{c}{d} + \frac{d}{c}\right)^2$

i) $(y + x)(y - x)$ j) $(-b + c)(b + c)$ k) $(-e - f)(-e + f)$ l) $(a + b)(-a - b)$

5.1.2 Umkehrung der binomischen Formeln

Für algebraische Umformungen sind Produkte in den meisten Fällen geeigneter als Summen. (Summen sind doof!). Wendet man die binomischen Formeln in die andere Richtung an, lassen sich gewisse Polynome in Produkte überführen. Diesen Vorgang nennt man **Faktorisieren**.

Beispiele:

$e^2 + 4ef + 4f^2 = (e + 2f)^2$

$9c^2 - 6cd + d^2 = (3a - b)^2$

$16a^2b^4 - 25c^6 = (4ab^2 + 5c^3)(4ab^2 - 5c^3)$

Aufgabe 5.10 Faktorisieren Sie:

a) $g^2 + e^2 - 2ge$ b) $u^2v^2 - (vu)^2$ c) $25b^2 + 16a^2 - 40ab$

d) $4a^2b + a^4 + 4b^2$ e) $x^{10} - y^{10}$ f) $16a^4 - 25$

g) $x^2 - 2x + 1$ h) $4 + y^4 + 4y$ i) $a^2 + b^2$

Auch durch **Ausklammern** kann faktorisiert werden.

Beispiele

$10a^3 + 20a^2b + 10ab^2 = 10a(a^2 + 2ab + b^2) = 10a \cdot (a + b)^2$

$7x^4 - 28(xy)^2 = 7x^2 \cdot (x^2 - 4y^2) = 7x^2(x + 2y)(x - 2y)$

Aufgabe 5.11 Faktorisieren Sie so weit wie möglich

a) $6a^4b^2 + 6a^2b^4 - 12a^2b^2$ b) $g^8 - h^8$ c) $(a + b)^2 + (a - b)^2 - 4b^2$

d) $(x + y)x^2 - y^2(x + y)$ e) $t^5 - 2t^3 + t$ f) $a^3b - ab^3$

Aufgabe 5.12 Eigentlich reicht die Formel für $(a+b)^2$. Die Formel für $(a-b)^2$ ergibt sich daraus. Zeigen Sie das, indem Sie die Identität $(a - b) = (a + (-b))$ verwenden.

5.1.3 Quadrate von Trinomen und Polynomen

Aufgabe 5.13 a) Was ist die "trinomische Formel" für $(a + b + c)^2$ und die "quadrinomische Formel" für $(a + b + c + d)^2$?

b) Beschreiben Sie, wie das (ausmultiplizierte) Quadrat eines Polynoms aussieht (so quasi die "polynomische Formel") für $(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots x_n)^2$.

Hinweis: Hier sind x_1, x_2 usw. unterschiedliche Variablen, wie z.B. a und b

5.1.4 Höhere Potenzen von Binomen, Pascal'sches Dreieck

Aufgabe 5.14 Schreiben Sie $(a + b)^3$ als Polynom in Normalform. *Hinweis: Verwenden dazu auch die binomische Formel, indem Sie die Identität $(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b)$ nutzen.*

Aufgabe 5.15 Schreiben Sie $(a+b)^4$ in Normalform. Berechnen Sie auf zwei Arten:
a) $(a+b)^3(a+b)$
b) $\left((a+b)^2\right)^2$

Aufgabe 5.16 a) Schreiben Sie die Koeffizienten der Normalform von $(a+b)^n$ für $n = 0, 1, 2, 3, 4$ in folgende Tabelle:

$(a+b)^0$ ___
$(a+b)^1$ ___ ___
$(a+b)^2$ ___ ___ ___
$(a+b)^3$ ___ ___ ___ ___
$(a+b)^4$ ___ ___ ___ ___ ___
$(a+b)^5$ ___ ___ ___ ___ ___ ___
$(a+b)^6$ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___
$(a+b)^7$ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___

b) Stellen Sie eine Vermutung auf, wie die Koeffizienten für $n = 5, 6$ und 7 aussehen und tragen Sie diese in der Tabelle ein.
c) Versuchen Sie Ihre Vermutung zu beweisen, indem Sie die Identität $(a+b)^n = (a+b)^{n-1}(a+b)$ nutzen.

Merke Pascal'sches Dreieck

Die Tabelle oben wird **Pascal'sches Dreieck** genannt. Es hat die Eigenschaft, dass jede Zahl gleich ✎ der Summe der beiden direkt darüber stehenden Zahlen ist.

Aufgabe 5.17 Mit Hilfe des Pascal'schen Dreiecks, berechnen Sie die Normalform von

a) $(x-2)^5$
b) $(2x+3)^6$

Hinweis: Sie dürfen die Koeffizienten auch als Produkt von Potenzen schreiben.

Aufgabe 5.18 Bilden Sie die Summe für jede Zeile des Pascal'schen Dreiecks.
a) Was stellen Sie fest?
b) Beweisen Sie Ihre Feststellung. *Hinweis: Benutzen Sie dazu entweder die Eigenschaft des Pascal'schen Dreiecks oder setzen Sie geeignete Zahlen für a und b ein.*

Aufgabe 5.19 Was erhält man, wenn man bei einer Zeile des Pascal'schen Dreiecks die Zahlen von links nach rechts abwechslungsweise addiert und subtrahiert? *Hinweis: Man nennt dies eine* **alternierende** *Summe.* Was vermuten Sie? Können Sie Ihre Vermutung beweisen? *Hinweis: Betrachten Sie* $(1-1)^n$.

Aufgabe 5.20 Es gilt: $(a+b)^n = (a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)$.
a) Beim vollständigen ausmultiplizieren entsteht ein Polynom. Was sind die Grade der einzelnen Monome und warum?
b) Begründen Sie folgende Aussage: Der Koeffizient vom Monom mit Namen a^2b^4 in der Normalform von $(a+b)^6$ entspricht genau der Anzahl Möglichkeiten aus 6 Objekten 2 Objekte auszuwählen.
c) Begründen Sie folgende Aussage: Der Koeffizient vom Monom mit Namen a^kb^{n-k} in der Normalform von $(a+b)^n$ entspricht genau der Anzahl Möglichkeiten aus n Objekten k Objekte auszuwählen.

5.2 Übungsaufgaben

Hinweis: *Maxima*, das Computer-Algebra-System, das u.a. für das Erstellen dieser Übungsaufgaben verwendet wurde, ordnet die Variablen in Monomen leider in alphabetisch umgekehrter Reihenfolge an.

Aufgabe 5.21 Wenden Sie die binomischen Formeln an.

a) $\left(5d^3+5f^3\right)^2$
b) $\left(-g^2+5m^2g-5x^3o\right)^2$
c) $\left(-r^2d^2-5j^3\right)\left(r^2d^2-5j^3\right)$
d) $\left(4i^3-5w^2d^2\right)^2$
e) $\left(3ul+3z\right)^2$
f) $\left(da^2-2e\right)\left(da^2+2e\right)$
g) $\left(-2i^3-2p^3j\right)^2$
h) $\left(-n^3-3r\right)^2$
i) $\left(2w^2-3l^3\right)\left(3l^3+2w^2\right)$
j) $\left(so^3-3d^2\right)^2$
k) $\left(4o^3a+4n^2\right)^2$
l) $\left(-3a^3-4u^3\right)\left(4u^3-3a^3\right)$
m) $\left(5c^3-4jh\right)^2$
n) $\left(2l^3-t^3o^2\right)^2$
o) $\left(4x^2p^3-5w^2\right)\left(4x^2p^3+5w^2\right)$
p) $\left(g^3-3k^2\right)^2$
q) $\left(4z^3h+4x^2\right)^2$
r) $\left(-5r^2k-5z^3t\right)\left(5z^3t-5r^2k\right)$
s) $\left(2a+j^3\right)^2$
t) $\left(3o^3d^2-f^2e\right)^2$
u) $\left(-3s^3-z^2\right)\left(3s^3-z^2\right)$
v) $\left(c^3-4x^2d^3+yi^3\right)^2$
w) $\left(-3l^2d^3-3x\right)^2$
x) $\left(-5vd^2-2i^2\right)\left(2i^2-5vd^2\right)$

Aufgabe 5.22 Faktorisieren Sie mit Hilfe der binomischen Formeln:

a) $k^2b^2-2n^2kb+n^4$
b) $4x^6k^2+4y^3x^3k+y^6$
c) $4o^6-9q^2p^4$
d) $4x^4i^2+20z^3x^2i+25z^6$
e) $16a^4-8la^2+l^2$
f) $m^4d^6-u^2r^2$
g) $25a^2-40n^3a+16n^6$
h) $9f^6+24mh^3f^3+16m^2h^6$
i) $9v^2-25d^4$
j) $25y^2v^4-20zyv^2+4z^2$
k) $j^4-2y^3j^2+y^6$
l) $x^6w^2-25u^2$
m) $9m^6e^6+6r^2m^3f^3e^3+r^4f^6$
n) $16b^6+8t^3d^3b^3+t^6d^6$
o) $9l^2-4m^6b^4$
p) $k^2+6wm^2k+9w^2m^4$
q) $4u^6e^2-4u^3qk^3e+q^2k^6$
r) $n^4h^2-4s^6$
s) $b^4+2e^2b^2+e^4$
t) $9c^4+12r^2c^2+4r^4$
u) $16v^4i^4-9s^2$
v) $w^2c^6+2woh^2c^3+o^2h^4$
w) $l^6-2y^3l^3+y^6$
x) $9y^2u^6-4a^4$

Aufgabe 5.23 Faktorisieren Sie:

a) $-4x^3o^4m^2+8x^3s^2o^2m^2-4x^3s^4m^2$
b) $5xv^2q^2a^2+10xv^2qo^3g^3a+5xv^2o^6g^6$
c) $8y^4u^3m^2-2y^2u^3d^2$
d) $-5se^4a^3+20sr^3ke^2a^3-20sr^6k^2a^3$
e) $25x^2a^2-30x^2n^3ha+9x^2n^6h^2$
f) $2v^6r^2ki-2l^6kj^6i$
g) $-8d^2c+24ldc-18l^2c$
h) $20o^3n^4h^6-20r^2o^3n^2h^3+5r^4o^3$
i) $3p^4g^4-3p^2b^6$
j) $-4w^6u^2h^4+20x^3w^3u^2h^3-25x^6u^2h^2$
k) $36x^2j^2g^7+96x^2o^3k^2jg^4+64x^2o^6k^4g$
l) $5v^3r^4l^2-5v^3l^2i^4$
m) $5fb^2-50t^3feb+125t^6fe^2$
n) $100nm^2+120wvnm+36w^2v^2n$
o) $5zw^4-5zj^4$
p) $oa^6+4qoa^3+4q^2o$
q) $2f^6c-4w^2k^3f^3c+2w^4k^6c$
r) $80s^4q^6h-45m^4h$
s) $-12o^3l^2h^6e+60o^3lh^3e-75o^3e$
t) $2p^3d^4+4p^3gd^2+2p^3g^2$
u) $125r^6d^4b^2-45y^2f^4b^2$
v) $5x^6kh^2+10x^3w^2r^3kh+5w^4r^6k$
w) $2t^2pe^4-20t^2s^3pe^2+50t^2s^6p$
x) $4zm^2f^6-16zx^6$

5.3 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe 5.2 ex-monome-normalform

a) $4+3$: Summe. Zusammenfassen: 7 (ist ein Monom).

b) $a+b$: Summe. Kann nicht zusammengefasst werden.

c) -4^2: Potenz einer Zahl. Ausrechnen: -16 (ist ein Monom).

d) x^2+x^2: Summe. Zusammenfassen $2x^2$ (ist ein Monom).

e) $y+y^2$: Summe. Kann nicht zusammengefasst werden.

f) 3^z: Variable im Exponenten.

g) $|v^2|$: Betrag. Da v^2 immer positiv, kann der Betrag weggelassen werden: v^2 (ist ein Monom).

h) $b \cdot 4a$: Koeffizient nicht an erster Stelle, Variablen nicht alphabetisch geordnet. Geordnet: $4ab$ (ist ein Monom).

Lösung zu Aufgabe 5.3 ex-polynome-ja-nein

a) $4x \cdot (x^2-5y)$: Ein Produkt. Ausmultiplizieren: $4x^3-20xy$ (ist ein Polynom).

b) $\frac{1}{4a^2-b}$: Ein Quotient. Kann nicht in ein Polynom umgeformt werden.

c) $|x-y|$: Ein Betrag. Kann nicht in ein Polynom umgeformt werden.

d) 3^x+4^y: Variablen im Exponenten. Kann nicht in ein Polynom umgeformt werden.

Lösung zu Aufgabe 5.4 ex-polynome-normalform

a) $3ab+2a+5ab+3a-b=8ab+5a-b$

b) $(x+2)\cdot x^2-x\cdot(x-2)-2\cdot(x-2)=x^3+2x^2-(x^2-2x)-(2x-4)=x^3+x^2+4$

c) $5xy^2\left((3x)^2+3x^3y+5y^2\right)=45x^3y^2+15x^4y^3+25xy^4=15x^4y^3+45x^3y^2+25xy^4$

d) $(g+2h^2)\cdot g+(h-2g)\cdot h=g^2+2h^2g+h^2-2gh=2gh^2+g^2-2gh+h^2$

Lösung zu Aufgabe 5.5 ex-polynome-normalform2

a) $(2a-3b+c)(a-b-a-c)=-2ab-2ac+3b^2+2bc-c^2$

b) $(x^3-y^3)(y^3+x^3)=x^6-y^6$

c) $(c+c^2+c^3+c^4)(c^3-c^2)=c^7-c^3$

d) $(a-x)(b-x)(c-x)\cdot\ldots\cdot(z-x)=0$

Lösung zu Aufgabe 5.6 ex-monom-produkt

Der Grad entspricht der Länge der "ausgeschriebenen" Namen (d.h. ohne Potenzen), bzw. der Summe aller Exponenten der Variablen. Bei Multiplikation addieren sich diese Grössen. D.h. **der Grad des Produkts ist die Summe der Grade der Faktoren**.

Lösung zu Aufgabe 5.7 ex-polynom-produkt

Der Grad des Produkts entspricht dem höchsten Grad aller Monome. Das Monom mit höchstem Grad wird gebildet als Produkt der beiden Monome mit höchstem Grad. Also auch hier addieren sich die Grade.

Lösung zu Aufgabe 5.8 ex-polynom-produkt-ausnahme

Nach unserer Definition ist der Grad einer Konstante (also einer rellen Zahl) Null. Ist die Konstante aber selbst Null, ist auch das Produkt Null, unabhängig vom anderen Faktor. Der Grad des Produkts ist also auf jeden Fall Null, wenn einer der beiden Faktoren Null ist.

Würde man den Grad vom Monom 0 als $-\infty$ (minus unendlich) definieren, ergäbe die Addition der Grade ebenfalls $-\infty$ und somit den Grad des Produkts.

Lösung zu Aufgabe 5.9 ex-binomische-formeln-anwenden

a) $(xy+y^2)^2 = x^2y^2 + 2xy^3 + y^4$

b) $\left(\frac{3}{4}a + \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{9}{16}a^2 + 2a + \frac{16}{9}$

c) $(2e+3f)^2 = 4e^2 + 12ef + 9f^2$

d) $\left(\sqrt{2}a + b\right)^2 = 2a^2 + 2\sqrt{2}ab + b^2$

e) $(y-z)^2 = y^2 - 2yz + z^2$

f) $\left(xy - y^2\right)^2 = x^2y^2 - 2xy^3 + y^4$

g) $(4ef-3fe)^2 = e^2f^2$ nicht vereinfacht $(16e^2f^2 - 24e^2f^2 + 9e^2f^2)$

h) $\left(\frac{c}{d} + \frac{d}{c}\right)^2 = \frac{c^2}{d^2} + 2 + \frac{d^2}{c^2}$ (kein Polynom)

i) $(y+x)(y-x) = -x^2 + y^2$ (Normalform x vor y)

j) $(-b+c)(b+c) = -b^2 + c^2$

k) $(-e-f)(-e+f) = e^2 - f^2$

l) $(a+b)(-a-b) = (a+b)\cdot(-1)\cdot(a+b) = -(a+b)^2 = -a^2 - 2ab - b^2$

Lösung zu Aufgabe 5.10 ex-binomische-formeln-umkehren

a) $g^2 + e^2 - 2ge = (g-e)^2$

b) $u^2v^2 - (vu)^2 = 0$ bzw. zuerst $(uv - vu)(uv + vu)$

c) $25b^2 + 16a^2 - 40ab = (5b - 4a)^2$

d) $4a^2b + a^4 + 4b^2 = (a^2 + 2b)^2$

e) $x^{10} - y^{10} = (x^5 + y^5)(x^5 - y^5)$

f) $16a^4 - 25 = (4a+5)(4a-5)$

g) $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

h) $4 + y^4 + 4y$ (nicht faktorisierbar). Wenn man die Aufgabenstellung "korrigiert" zu $4 + y^4 + 4y^2$ kann man faktorisieren, nämlich $(2+y)^2$.

i) a^2+b^2 (nicht faktorisierbar). Auch wenn man $(a+b)^2 - 2ab$ schreibt, hat man immer noch eine Summe.

Lösung zu Aufgabe 5.11 ex-binomische-formeln-faktorisieren

a) $6a^4b^2 + 6a^2b^4 - 12a^2b^2 = 6a^2b^2(a^2 + b^2 - 2)$

b) $g^8 - h^8 = (g^4 + h^4)(g^4 - h^4) = \ldots = (g^4 + h^4)(g^2 + h^2)(g+h)(g-h)$

c) $(a+b)^2 + (a-b)^2 - 4b^2 = a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 - 4b^2 = 2(a^2 - b^2) = 2(a+b)(a-b)$

d) $(x+y)x^2 - y^2(x+y) = (x+y)(x^2 - y^2) = (x+y)^2(x-y)$

e) $t^5 - 2t^3 + t = t(t^4 - 2t^2 + 1) = t(t^2 - 1)^2$

f) $a^3b - ab^3 = ab(a^2 - b^2) = ab(a+b)(a-b)$

Lösung zu Aufgabe 5.12 ex-binomische-formeln-eine-reicht

$(a + (-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Lösung zu Aufgabe 5.13 ex-binomische-formeln-tri-quadri-poly

a) $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ und $a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$.

b) $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2+2x_1x_2+2x_1x_3+\ldots+2x_1x_n+2x_2x_3+2x_2x_4+\ldots+\ldots+2x_{n-1}x_n$

Man erhält die (einfache) Summe aller Quadrate plus die doppelte Summe aller möglichen Zweierprodukte.

2 Zweierprodukte

$$(x_1+\ldots+x_i+\ldots+x_j+\ldots+x_n)(x_1+\ldots+x_i+\ldots+x_j+\ldots+x_n)$$

1 Quadrat

Lösung zu Aufgabe 5.14 ex-binomische-formeln-hoch-drei

$(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=\ldots=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

Lösung zu Aufgabe 5.15 ex-binomische-formeln-hoch-vier

a)

$$\begin{array}{rlllll}(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a+b)= & a^4+ & 3a^3b+ & 3a^2b^2+ & ab^3+ & \\ & & a^3b+ & 3a^2b^2+ & 3ab^3+ & b^4= \\ & a^4+ & 4a^3b+ & 6a^2b^2+ & 4ab^3+ & b^4\end{array}$$

b) $(a^2+2ab+b^2)^2=\underbrace{a^4+4a^2b^2+b^4}_{\text{Quadrate}}+\underbrace{4a^3b+2a^2b^2+4ab^3}_{\text{Doppelprodukte}}=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

Lösung zu Aufgabe 5.16 ex-binomische-formeln-pascal-dreieck

Die vollständige Tabelle sieht wie folgt aus:

$(a+b)^0$	1
$(a+b)^1$	1 1
$(a+b)^2$	1 2 1
$(a+b)^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5$	1 5 10 10 5 1
$(a+b)^6$	1 6 15 20 15 6 1
$(a+b)^7$	1 7 21 35 35 21 7 1

b) Die Zahlen sind immer die Summe der beiden oberen Zahlen (bzw. der einen Zahl an den Rändern).

c) Die Namen der Glieder von $(a+b)^n$ sind a^n, $a^{n-1}b$, $a^{n-2}b^2$, $\ldots$, ab^{n-1}, b^n. D.h. die Potenzen von a sind absteigend, die Potenzen von b aufsteigend (alle Grade sind gleich n).

Multiplizert man nun $(a+b)^{n-1}$ mit a, erhält man die Namen von a^n bis ab^{n-1} mit den gleichen Koeffizienten wie $(a+b)^{n-1}$. Multiplizert man nun $(a+b)^{n-1}$ mit b, erhält man die Namen von $a^{n-1}b$ bis b^n, wieder mit den gleichen Koeffizienten. Schreibt man die Namen untereinander (wie in der Lösung von Aufgabe 5.3a)), sieht man, dass immer benachbarte Koeffizienten der Zeile $n-1$ zu einem neuen Koeffizienten der Zeile n addiert werden.

Lösung zu Aufgabe 5.17 ex-binomische-formeln-pascal-dreieck-anwenden

a) $(x-2)^5=x^5+5\cdot(-2)x^4+10\cdot(-2)^2x^3+10\cdot(-2)^3x^2+5\cdot(-2)^4x+(-2)^5=x^5-10x^4+40x^3-80x^2+80x-32$

b) $(2x+3)^6=2^6x^6+6\cdot 2^6\cdot 3x^5+15\cdot 2^4\cdot 3^2x^4+20\cdot 2^3\cdot 3^3x^3+15\cdot 2^2\cdot 3^4x^2+6\cdot 2\cdot 3^5x+3^6$

Lösung zu Aufgabe 5.18 ex-binomische-formeln-pascal-dreieck-zeilensumme

a) Die Summe der n-ten Zeile ist 2^n.

b) Im Pascaldreieck wird eine Zahl als Summe der oberen beiden Zahlen berechnet. Umgekehrt trägt jede Zahl genau zwei Mal zur darunterliegenden Zeile bei. D.h. die Zeilensumme verdoppelt sich, wenn man eine Zeile nach unten geht. Da die erste Zeile die Summe $1=2^0$ stimmt die obige Aussage.

Alternativ betrachtet man den Ausdruck $(1+1)^n$. Wenn man diesen Ausdruck vollständig ausmultiplizert (mit Hilfe des Pascaldreiecks) erhält man genau die Summe aller Koeffizienten. Es gilt natürlich dass $(1+1)^n = 2^n$.

Lösung zu Aufgabe 5.19 ex-binomische-formeln-pascal-dreieck-alternierende-zeilensumme

Die alternierende Summe ergibt Null, ausser für die oberste Zeile (Zeile zu $(a+b)^0$).

Entwickelt man $(1-1)^n$ erhält man absteigende Potenzen von (-1), d.h. die Koeffizienten erhalten abwechslungsweise ein positives und negatives Vorzeichen. D.h. die Entwicklung von $(1-1)^n$ ist genau die alternierende Summe. Für $n \geq 1$ ist $(1-1)^n = 0$.

Hinweis: 0^0 ist nicht definiert. Es wird aber hin und wieder als 1 angenommen, womit das Pascal'sche Dreieck auch für diesen Spezialfall seine Gültigkeit bewahrt.

Lösung zu Aufgabe 5.20 ex-binomische-formeln-pascal-dreieck-n-choose-k

a) Der Grad ist immer n, weil immer n Variablen miteinander multipliziert werden.

b) $(a+b)^6 = (a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)$. Beim Ausmultiplizieren wird jeweils aus jeder Klammer ein Glied ausgewählt und alle zusammen multipliziert. Um a^2b^4 zu erhalten, muss aus genau zwei Klammern ein a ausgewählt werden (und aus den anderen ein b). Addiert man alle diese Möglichkeiten erhält man den Koeffizienten von a^2b^4 (in diesem Fall 15, siehe im Pascal'schen Dreieck). Ob man nun 2 aus 6 Klammern oder 2 Objekte aus 6 auswählt, spielt für die Anzahl Möglichkeiten keine Rolle.

c) Wie oben, addiert man alle Möglichkeiten, aus n Klammern k Klammern mit dem a auszuwählen.

Lösung zu Aufgabe 5.21 ex-binomische-formeln-anwenden-bis-zum-abwinken

a) $25d^6 + 50f^3d^3 + 25f^6$
b) $g^4 - 10m^2g^3 + 25m^4g^2 + 10x^3og^2 - 50x^3om^2g+$
c) $25j^6 - r^4d^4$
d) $25w^4d^4 - 40w^2i^3d^2 + 16i^6$
e) $9u^2l^2 + 18zul + 9z^2$
f) $d^2a^4 - 4e^2$
g) $4i^6 + 8p^3ji^3 + 4p^6j^2$
h) $n^6 + 6rn^3 + 9r^2$
i) $4w^4 - 9l^6$
j) $9d^4 - 6so^3d^2 + s^2o^6$
k) $16o^6a^2 + 32o^3n^2a + 16n^4$
l) $9a^6 - 16u^6$
m) $25c^6 - 40jhc^3 + 16j^2h^2$
n) $4l^6 - 4t^3o^2l^3 + t^6o^4$
o) $16x^4p^6 - 25w^4$
p) $g^6 - 6k^2g^3 + 9k^4$
q) $16z^6h^2 + 32z^3x^2h + 16x^4$
r) $25r^4k^2 - 25z^6t^2$
s) $4a^2 + 4j^3a + j^6$
t) $9o^6d^4 - 6o^3f^2ed^2 + f^4e^2$
u) $z^4 - 9s^6$
v) $c^6 - 8x^2d^3c^3 + 2yi^3c^3 + 16x^4d^6 - 8yx^2i^3$
w) $9l^4d^6 + 18xl^2d^3 + 9x^2$
x) $25v^2d^4 - 4i^4$

Lösung zu Aufgabe 5.22 ex-binomische-formeln-umkehren-bis-zum-abwinken

a) $\left(kb - n^2\right)^2$
b) $\left(2x^3k + y^3\right)^2$
c) $\left(2o^3 - 3qp^2\right)\left(2o^3 + 3qp^2\right)$
d) $\left(2x^2i + 5z^3\right)^2$
e) $\left(4a^2 - l\right)^2$
f) $\left(m^2d^3 - ur\right)\left(m^2d^3 + ur\right)$
g) $\left(5a - 4n^3\right)^2$
h) $\left(3f^3 + 4mh^3\right)^2$
i) $\left(3v - 5d^2\right)\left(5d^2 + 3v\right)$
j) $\left(5yv^2 - 2z\right)^2$
k) $\left(j^2 - y^3\right)^2$
l) $\left(-5u - x^3w\right)\left(5u - x^3w\right)$
m) $\left(3m^3e^3 + r^2f^3\right)^2$
n) $\left(4b^3 + t^3d^3\right)^2$
o) $\left(-2m^3b^2 - 3l\right)\left(2m^3b^2 - 3l\right)$
p) $\left(k + 3wm^2\right)^2$
q) $\left(2u^3e - qk^3\right)^2$
r) $\left(-n^2h - 2s^3\right)\left(2s^3 - n^2h\right)$
s) $\left(b^2 + e^2\right)^2$
t) $\left(3c^2 + 2r^2\right)^2$
u) $\left(-4v^2i^2 - 3s\right)\left(3s - 4v^2i^2\right)$
v) $\left(wc^3 + oh^2\right)^2$
w) $(l-y)^2\left(l^2 + yl + y^2\right)^2$
x) $\left(-2a^2 - 3yu^3\right)\left(2a^2 - 3yu^3\right)$

Lösung zu Aufgabe 5.23 ex-faktorisieren-bis-zum-abwinken

a) $-4m^2x^3\left(o-s\right)^2\left(o+s\right)^2$

b) $5xv^2\left(qa+o^3g^3\right)^2$

c) $-2y^2u^3\left(d-2ym\right)\left(d+2ym\right)$

d) $-5a^3s\left(e^2-2r^3k\right)^2$

e) $x^2\left(5a-3n^3h\right)^2$

f) $-2k\left(l^3j^3-v^3r\right)\left(l^3j^3+v^3r\right)i$

g) $-2c\left(2d-3l\right)^2$

h) $5o^3\left(2n^2h^3-r^2\right)^2$

i) $-3p^2\left(b^3-pg^2\right)\left(b^3+pg^2\right)$

j) $-u^2h^2\left(2w^3h-5x^3\right)^2$

k) $4x^2g\left(3jg^3+4o^3k^2\right)^2$

l) $-5v^3l^2\left(i-r\right)\left(i+r\right)\left(i^2+r^2\right)$

m) $5f\left(b-5t^3e\right)^2$

n) $4n\left(5m+3wv\right)^2$

o) $-5z\left(j-w\right)\left(j+w\right)\left(j^2+w^2\right)$

p) $o\left(a^3+2q\right)^2$

q) $2c\left(f^3-w^2k^3\right)^2$

r) $-5h\left(3m^2-4s^2q^3\right)\left(3m^2+4s^2q^3\right)$

s) $-3eo^3\left(2lh^3-5\right)^2$

t) $2p^3\left(d^2+g\right)^2$

u) $5b^2\left(5r^3d^2-3yf^2\right)\left(5r^3d^2+3yf^2\right)$

v) $5k\left(x^3h+w^2r^3\right)^2$

w) $2t^2p\left(e^2-5s^3\right)^2$

x) $4z\left(mf^3-2x^3\right)\left(mf^3+2x^3\right)$

6 Gleichungen

Dieses Kapitel basiert zu grossen Teilen auf den Unterrichtsunterlagen von Angelika Rupflin der Kantonsschule am Burggraben St. Gallen, die ihrerseits auf dem Fundus der Fachgruppe Mathematik basieren.

Aufgabe 6.1 In einer Prüfung gibt der Lehrer für 0 Punkte die Note 1 und für jeden weiteren Punkt 0.3 Notenpunkte. Welche Punktzahl gibt Note 4?

Lösungsschema:

1. Festlegen der Unbekannten (inkl. Masseinheit!): ✎ p ist die gesuchte Anzahl Punkte.
2. Übersetzen der Textinformation und Aufstellen der Gleichung: ✎ Mit p Punkten erhält man die Note $1 + 0.3p$. Wir wollen also dass $1 + 0.3p = 4$.
3. Auflösen der Gleichung: ✎

$$\begin{aligned} 1 + 0.3p &= 4 && \mid -1 \\ 0.3p &= 3 && \mid : 0.3 \\ p &= 10 \end{aligned}$$

4. Antwort: ✎ Mit $p = 10$ Punkten erhält man die Note 4.

6.1 Grundlegendes zu Gleichungen und ihren Lösungen

Eine Gleichung ist eine **Aussage**. Für Aussagen gibt es drei Möglichkeiten:

- Immer wahr. Z.B. $2 + 3 + x = 5 + x$ oder $6 \cdot 7 = 42$.
- Immer falsch. Z.B. $x + 1 = x$ oder $1 = 0$.
- Nur für gewisse Einsetzungen wahr. Z.B. $2x + 3 = 6$ ist nur wahr für $x = \frac{3}{2}$.

Lösungen einer Gleichung sind alle möglichen Einsetzungen, die eine wahre Aussage ergeben. Alle möglichen Lösungen werden in der **Lösungsmenge** $\mathbb{L}$ zusammengefasst.

Manchmal möchte man die möglichen Einsetzungen einschränken, z.B. auf natürliche Zahlen. In solchen Fällen wird eine **Grundmenge** $\mathbb{G}$ angegeben, z.B. $\mathbb{G} = \mathbb{N}$. Wird nichts angegeben, gilt die Abmachung $\mathbb{G} = \mathbb{R}$ (alle reellen Zahlen).

Beispiele:	$2x + 3 = 6$	$\mathbb{G}_1 = \mathbb{Z}$	$\mathbb{L}_1 = \{\} = \varnothing$, keine Lösung
		$\mathbb{G}_2 = \mathbb{Q}$	$\mathbb{L}_2 = \{\frac{3}{2}\}$, bzw. $x = \frac{3}{2}$
		$\mathbb{G}_3 = \mathbb{R}$	$\mathbb{L}_3 = \{\frac{3}{2}\}$, bzw. $x = \frac{3}{2}$

Fehlt die Angabe der Grundmenge, so wird immer $\mathbb{R}$ verwendet.

Beispiele:	$x + 1 = 1$	$\mathbb{L}_1 = \{0\}$, $x = 0$
	$x + 1 = x$	$\mathbb{L}_2 = \{\} = \varnothing$, keine Lösung
	$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$	$\mathbb{L}_3 = \mathbb{G} = \mathbb{R}$, jede Zahl ist Lösung
	$x^2 = 25$	$\mathbb{L}_4 = \{-5, +5\}$, $x = \pm 5$

Um die Lösung einer Gleichung zu bestimmen, versucht man normalerweise, die Unbekannte zu *isolieren*.

6.2 Lineare Gleichungen

Definition 6.1 Lineare Gleichung

Eine Gleichung, die man in die Form

$$\boxed{a \cdot x = b} \qquad (\text{mit } a,\, b \in \mathbb{R})$$

bringen kann, heisst **lineare Gleichung**. *Hinweis: Eine lineare Gleichung kann auch als Polynom vom Grad 1 aufgefasst werden, das gleich Null gesetzt wird:* $ax - b = 0$.

Beispiel: $(x-1)^2 = (x+2) \cdot (x-2)$ ✎

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 &= x^2 - 4 && \mid -x^2 \\ -2x + 1 &= -4 && \mid -1 \\ -2x &= -5 && \mid :(-2) \\ x &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Satz 1

Lineare Gleichungen $a \cdot x = b$ haben entweder **eine** Lösung, **keine** Lösung oder **unendlich viele** Lösungen.

$a \neq 0$	b beliebig	$a \cdot x = b$	$x = \frac{b}{a}$	$\mathbb{L} = \frac{b}{a}$
$a = 0$	$b \neq 0$	$0 \cdot x = b$	keine Lösung	$\mathbb{L} = \{\} = \varnothing$
$a = 0$	$b = 0$	$0 \cdot x = 0$	jede Zahl ist Lösung	$\mathbb{L} = \mathbb{G} = \mathbb{R}$

Aufgabe 6.2 Lösen Sie nach x auf:

a) $\dfrac{4x-5}{3} - \dfrac{2x-3}{6} = \dfrac{x}{2} - 1$ b) $4x(x-1) = (2x-1)^2 - 1$ c) $\dfrac{8x-3}{8} - \dfrac{8+3x}{3} = 0$

d) Für welche Werte des Parameters p hat die Gleichung $p(x+3) = 5(p-x)$ genau eine Lösung?

6.3 Gleichungen mit Parametern

Parameter sind zusätzliche Variablen, um gegebene, aber numerisch (noch) unbekannte Grössen darzustellen, wie z.B. ein Zinssatz. Es gilt z.B. die Formel $K_n = K_0 \cdot (1+p)^n$.

Wenn nicht anders erwähnt, werden Unbekannte mit x, y oder z bezeichnet; die Parameter mit a, b, c usw. Ziel ist es, die Gleichungen nach der Unbekannten aufzulösen.

Merke Strategie zum Lösen von Parametergleichungen

1. Vereinfache beide Seiten der Gleichung.
2. Bringe alle Terme mit der Unbekannten x auf eine Seite, die übrigen Terme auf die andere Seite.
3. Klammere x aus und dividiere die Gleichung durch den Begleitfaktor von x.

Beispiel: $a(x-b) = 2(ax-2a-bx)$

$$
\begin{aligned}
ax - ab &= 2ax - 4a - 2bx && |+ab-2ax+2bx\\
-ax + 2bx &= -4a + ab\\
x(-a+2b) &= a(b-4a) && |:(-a+2b)\\
x &= \frac{a(b-4a)}{-a+2b} = \frac{a(4a-b)}{a-2b}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6.3 Lösen Sie ohne Diskussion der Sonderfälle nach x, y oder z auf. Ohne Sonderfälle bedeutet, dass man annimmt, dass die Gleichungen genau eine Lösung haben.

a) $qx - x = q^2 - 1$ b) $2(bz - cz) = z + bz - c$ c) $(y-3p)^2 = 2y(y+3p) - y(y-1)$

6.3.1 Diskussion von Sonderfällen

Parametergleichungen können für bestimmte Werte der Parameter keine oder unendlich viele Lösungen besitzen. Man spricht dann bei diesen Parameterwerten von einem Sonderfall der Gleichung bzw. Lösungen.

Aufgabe 6.4 Lösen Sie mit Diskussion der Sonderfälle:

a) $ax + b = 3$ b) $px - 5 = 2x + q$ c) $p^2x - px = p^2 - 1$

6.4 Äquivalenz-, Gewinn- und Verlustumformungen

Definition 6.2 Äquivalenzumformungen

Äquivalenzumformungen sind Umformungen einer Gleichung, welche die Lösungsmenge der Gleichung nicht verändern:

- **Addieren und Subtrahieren** von beliebigen Termen[a] und Zahlen
- Multiplizieren mit Zahlen **ungleich Null** und dividieren durch Zahlen **ungleich Null**.

[a]Vorausgesetzt, die Terme sind für alle Werte der Unbekannten definiert.

Die Äquivalenzumformungen werden verwendet, um Gleichungen zu vereinfachen. Es gibt aber auch «problematische» Umformungen von Gleichungen, die Sie jetzt kennen lernen werden:

6.4.1 Lernaufgabe

Lösen Sie die folgenden Aufgaben der Reihe nach und füllen Sie die Lücken aus!

Aufgabe 6.5 Gegeben ist die Gleichung $x = 3$

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der Gleichung

$$\mathbb{L} = \{3\}$$

b) Quadrieren Sie beide Seiten der Gleichung und bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der neuen Gleichung!

$$x = 3 \quad | \quad (\dots)^2$$

$$x^2 = 9$$

$$\mathbb{L} = \{-3, +3\}$$

Sie haben die Aufgaben a) und b) richtig gelöst, wenn die Lösungsmenge aus b) ein Element mehr besitzt als die aus a).

Merke Quadrieren ist eine Gewinnumformung

Aus diesem Grund ist das Quadrieren einer Gleichung eine **Gewinnumformung**: Man kann dabei eine (oder mehrere) Lösung(en) gewinnen.

Merke Verlustumformung

Umgekehrt kann man bei einer **Verlustumformung** einer Gleichung eine oder mehrere Lösungen verlieren.

Man sieht das in der nächsten Aufgabe:

Aufgabe 6.6 Betrachten Sie die Gleichung $x^4 = 16$

a) Geben Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der Gleichung an! (Vorsicht: es gibt 2 Lösungen)

$$\mathbb{L} = \{-2, +2\}$$

b) Ziehen Sie beiden Seiten der Gleichung die Wurzel und geben Sie wieder die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ an.

$$x^4 = 16 \quad | \quad \sqrt{\cdot}$$

$$x^2 = 4$$

$$\mathbb{L} = \{-2, +2\}$$

c) Vergleichen Sie die Lösungsmengen aus a) und b)! Sie sind gleich .

d) Ziehen Sie nochmals auf beiden Seiten die Wurzel und geben Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ an!

$$x^2 = 4 \quad | \quad \sqrt{\cdot}$$

$$x = 2$$

$$\mathbb{L} = \{2\}$$

Merke

Das beidseitige Wurzelziehen einer Gleichung kann eine ✎ Verlustumformung sein.

Übrigens sieht man in der Aufgabe 6.6, dass man nicht in jedem Fall bei einer Verlust- oder Gewinnumformung eine Lösung verliert bzw. gewinnt. Bei b) verliert man keine, bei d) verliert man eine Lösung.

Aufgabe 6.7 Bestimmen Sie die Lösungsmengen und füllen Sie die Lücken aus:

a)

$$x - 2 = 0$$

$$\mathbb{L} = \{2\}$$

b)

$$x - 2 = 0 \quad | \quad \cdot (x+1)$$

$$(x-2)(x+1) = 0$$

$$\mathbb{L} = \{-1, 2\}$$

(Tipp: Ein Produkt ist dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist.)

Merke

Das Multiplizieren einer Gleichung mit einem Term, der die Variable x enthält, kann eine ✎ Gewinnumformung sein.

c)

$$(x+4)x = x+4$$
$$\mathbb{L} = \{-4, 1\}$$

(Tipp: Finden Sie die zwei Lösungen durch Probieren, es sind ganze Zahlen zwischen -10 und 10.)

d)

$$(x+4)x = x+4 \qquad | \quad : (x+4)$$
$$x = 1$$
$$\mathbb{L} = \{1\}$$

Merke

Das Dividieren einer Gleichung durch einem Term, der die Unbekannte x enthält, kann eine
✎ Verlustumformung sein.

Beim Dividieren durch einen Term, der die Unbekannte enthält, muss sichergestellt werden, dass der Term nicht Null ist. Das führt auf eine Fallunterscheidung. Beispiel:

$$(x-3)x = (x-3)$$

Fall 1: Division nicht möglich weil $(x-3) = 0$, also $x = 3$. In diesem Fall erhält man die Gleichung $0 = 0$ und damit eine wahre Aussage. $x = 3$ ist also eine Lösung der Gleichung!

Fall 2: $(x-3) \neq 0$. In diesem Fall darf man dividieren und verliert keine Lösung (die wurde in Fall 1 bereits berücksichtigt).

$$x = 1$$

Damit ist $\mathbb{L} = \{1, 3\}$.

Merke

Damit wir keine unvollständigen Lösungsmengen bekommen, müssen Verlustumformungen vermieden oder speziell behandelt werden. Gewinnumformungen jedoch lassen sich nicht vermeiden. Damit sich keine falschen Lösungen «einschmuggeln», prüfen wir am Schluss der Aufgabe alle Lösungen der Lösungsmenge.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \sqrt{3x-1} &= \sqrt{4x+1} \qquad | \text{ quadrieren} \qquad \textbf{Gewinnumformung!} \\ 3x-1 &= 4x+1 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Danach setzt man die gefundenen Lösungen in die Ausgangsgleichung ein. **Man macht die Probe:**

$$\begin{aligned} \sqrt{3\cdot(-2)-1} &= \sqrt{4\cdot(-2)+1} \\ \sqrt{-7} &= \sqrt{-7} \end{aligned}$$

ist falsch, da man von einer negativen Zahl keine Wurzel ziehen darf.
$x = -2$ ist also keine Lösung der Gleichung. Sie wurde durch eine Gewinnumformung "gewonnen".
Da wir keine weiteren Lösungen gefunden haben, ist die Lösungsmenge der Gleichung $\sqrt{3x-1} = \sqrt{4x+1}$ leer.
$\mathbb{L} = \{\} = \varnothing$.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \frac{2x-1}{x-3} &= \frac{5x-10}{x-3} \quad \Big| \cdot (x-3) \qquad \textbf{Gewinnumformung!} \\ 2x-1 &= 5x-10 \\ 9 &= 3x \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Mache selbst die Probe und bestimme $\mathbb{L}$!

✎ $x = 3$ führt in der Ausgangsgleichung zu Divisionen durch Null und ist somit keine Lösung. Also $\mathbb{L} = \varnothing$.

Aufgabe 6.8

a) $\sqrt{3x+1} = \sqrt{4x-1}$

b) $\sqrt{x-5} = \sqrt{7-x}$

c) $\sqrt{2x-6} = \sqrt{8-5x}$

d) $\sqrt{2x+1} = x+1$

Aufgabe 6.9

a) $\dfrac{5x}{2x-3} = \dfrac{3x-10}{2x-3}$

b) $\dfrac{2x}{7x-1} = \dfrac{2-10x}{14x-2}$

c) $\dfrac{5x}{2x-3} = \dfrac{5x-10}{2x-3}$

6.5 Textaufgaben aus Algebra 1 S. 66 ff

Wenden Sie bei folgenden Aufgaben das Lösungsschema und die Darstellung wie in Aufgabe 6.1 auf Seite 36 an.

Aufgabe 6.10 Bestimme eine zweistellige (natürliche) Zahl mit folgender Eigenschaft: fügt man die Ziffer 3 einmal links und einmal rechts hinzu, so unterscheiden sich die entstehenden beiden Zahlen um 333.

Aufgabe 6.11 “Meine Tante”, sagt Simone, “ist jetzt 5-mal so alt wie ich. In 7 Jahren wird sie nur noch 3-mal so alt sein. Wie alt bin ich heute?”

Aufgabe 6.12 Ein Teil eines Kapitals von 70 350 Franken ist zu 6 % angelegt, der andere zu 5 %. Der Jahreszins des gesamten Kapitals beträgt 4 100 Franken. Wie gross sind die beiden Teile?

Aufgabe 6.13 Zu welcher Zeit (auf Hunderstelsekunden genau) zwischen 16 Uhr und 17 Uhr bilden die Zeiger einer Uhr einen rechten Winkel?

Aufgabe 6.14 Die Ortschaften A und B liegen 120 Bahnkilometer voneinander entfernt. Ein Zug verlässt A um 15.00 Uhr in Richtung B; seine mittlere Geschwindigkeit beträgt 72 km/h. Der Gegenzug verlässt B um 15.15 Uhr; seine mittlere Geschwindigkeit beträgt 88 km/h. Wann kreuzen sich die beiden Züge?

6.6 Einfache nicht lineare Gleichungen

Merke

Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens ein Faktor Null ist:

$$T_1 \cdot T_2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad T_1 = 0 \quad \text{oder} \quad T_2 = 0$$

Aufgabe 6.15

a) $(2x+7) \cdot (5x-8) \cdot (x^2+1) = 0$

b) $(x+4)(x^2-4) = 0$

c) $x^3 - 2x^2 + x = 0$

d) $x \cdot (x+6) = -9$

6.7 Übungsaufgaben

Aufgabe 6.16 Lösen Sie folgende Gleichungen nach x auf mit Diskussion aller Spezialfälle.

a) $p(px-1)=-2(2x-1)$ b) $a(x-3)=xb-2$ c) $x^2-ba^2=0$

6.7.1 Schülerbeiträge

Aufgabe 6.17 Max, Isabella und Fabio haben zusammen CHF 251. Max hat CHF 27 mehr als Fabio, Isabella hat CHF 14 mehr als Max. Wie viel Geld besitzt Max?

Aufgabe 6.18 Eine Treppe hat 34 Stufen. Würde jede Stufe um 2.7cm höher gebaut, könnten damit 4 Stufen eingespart werden. Wie hoch ist eine Stufe in cm?

Aufgabe 6.19 Zwei Brüder sind 21 und 29 Jahre alt. Vor wie vielen Jahren war der ältere Bruder dreimal so alt wie der jüngere?

Aufgabe 6.20 Mia ist genau so viele Tage alt, wie Tim Wochen alt ist. Mia ist genau so viele Monate alt, wie Leo Jahre alt ist. Timo ist doppelt so alt wie Leo. Wie alt ist Timo, wenn alle zusammen 352 alt sind?

Aufgabe 6.21 Wenn x durch 8 dividiert wird kommt man auf die vierte Wurzel von x. Wie viel ist x?

Aufgabe 6.22 Kiara und ihre Mutter sind gemeinsam 68 Jahre alt. Vor 13 Jahren hatte Kiaras Mutter das vierfache Alter von dem welches Kiara in drei Jahren erreichen wird. Wie alt sind die beiden?

Aufgabe 6.23 Was ist die Länge und die Breite eines Rechtecks, wenn wir wissen dass der Umfang 380 cm beträgt und die Länge 20 cm länger ist als die Breite?

Aufgabe 6.24 3 rote Kugeln sind gleich schwer wie 4 orange Kugeln. 2 orange Kugeln sind gleich schwer wie 3 Grüne Kugeln. Wie viele grüne Kugeln muss ich auf eine Balkenwaage legen, um 2 rote Kugeln auszutarieren?

Aufgabe 6.25 Der Vater wäre fünfmal so alt wie der Altersunterschied des ältesten Sohnes und der jüngsten Tochter, wenn der älteste Sohn ein Jahr jünger wäre. Die Mutter hat ihr erstes Kind im Alter von 22 Jahren bekommen, zu diesem Zeitpunkt war der Vater genau 1.5-mal so alt wie seine Frau. Die Familie hat 3 Kinder, sie sind zusammen 30 Jahre alt. Das jüngste Kind durfte gerade erst den Film Schneewittchen schauen (ab 6).
Wie alt ist das mittlere Kind?

Aufgabe 6.26 Marvin hat 8 Bonbons und Kevin hat 4. Wie viele Bonbons hat Marianne, wenn sie die Summe von der Hälfte des Produkts zwischen der Summe von Marvins und Kevins Bonbons und denen von Marianne und der Wurzel vom Quadrat vom Quadrat von der Differenz von Kevins Bonbons und 1 hat.

Aufgabe 6.27 Drei gute Freunde sind in einer Band und haben vor 5 Wochen eine CD rausgebracht. Pro verkaufte CD erhalten sie 7 Fr. Die Produktion kostete sie 7'000 Fr. Wenn sie alle verkaufen verdienen sie 63'000 Fr.
Wie viele CDs produzierten sie?

Aufgabe 6.28 Karla, Klaus, Tomas, Berta, Hana und Mona sind sechs Geschwister. Die Summe aller ihrer Alter ist das Alter von Klaus verneunfacht. Karla ist die älteste von den sechs Kindern, sie ist 2.5 mal so alt wie Hana. Hana ist gleich alt wie Monas und Bertas Alter zusammengerechnet. Tomas ist zweimal so alt wie Mona und somit das zweitälteste Kind. Alle Kinder sind unter 11 Jahre alt und nur zwei haben die Spielgruppe schon hinter sich und sind entweder im Kindergarten oder schon in der Schule (ab 5). Mona und Klaus sind Zwillinge. Berta ist die jüngste und ist so alt wie Hanas und Monas Alter zusammen minus Tomas' Alter.
Wie alt ist jedes Kind?

6.8 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:
Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".
Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.
Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe 6.2 ex-komplexere-lineare-gleichungen

a)

$$
\begin{aligned}
\frac{4x-5}{3}-\frac{2x-3}{6} &= \frac{x}{2}-1 && \mid \cdot 6\\
2(4x-5)-(2x-3) &= 3x-6\\
8x-10-2x+3 &= 3x-6\\
6x-7 &= 3x-6 && \mid -3x+7\\
3x &= 1 && \mid :3\\
x &= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
4x(x-1) &= (2x-1)^2-1\\
4x^2-4x &= 4x^2-4x+1-1 && \mid -4x^2+4x\\
0 &= 0\\
\mathbb{L} &= \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
\frac{8x-3}{8}-\frac{8+3x}{3} &= 0 && \mid \cdot 24\\
3(8x-3)-8(8+3x) &= 0\\
24x-9-(64+24x) &= 0\\
24x-9-64-24x &= 0\\
-73 &= 0\\
\mathbb{L} &= \varnothing
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
p(x+3) &= 5(p-x)\\
px+3p &= 5p-5x && \mid +5x-3p\\
px+5x &= 2p\\
x(p+5) &= 2p
\end{aligned}
$$

Diese Gleichung hat genau dann eine Lösung, wenn $(p+5)\neq 0$, also wenn $p\neq -5$.

Lösung zu Aufgabe 6.3 ex-gleichungen-mit-parametern-ohne-diskussion

a)

$$\begin{aligned} qx - x &= q^2 - 1 \\ x(q-1) &= (q+1)(q-1) && \mid : (q-1) \\ x &= q+1 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 2(bz - cz) &= z + bz - c \\ 2bz - 2cz &= z + bz - c && \mid -z - bz \\ 2bz - 2cz - z - bz &= -c \\ z(2b - 2c - 1 - b) &= -c \\ z(b - 2c - 1) &= -c && \mid : (b - 2c - 1) \\ z &= -\frac{c}{b - 2c - 1} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} (y - 3p)^2 &= 2y(y + 3p) - y(y-1) \\ y^2 - 6py + 9p^2 &= 2y^2 + 6py - (y^2 - y) \\ y^2 - 6py + 9p^2 &= y^2 + 6py + y && \mid -y^2 - 6py - y - 9p^2 \\ -12py - y &= -9p^2 \\ y(-12p - 1) &= -9p^2 && \mid : (-12p - 1) \\ y &= \frac{9p^2}{12p + 1} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 6.4 ex-gleichungen-mit-parametern-mit-diskussion

a)

$$\begin{aligned} ax + b &= 3 \\ ax &= 3 - b \end{aligned}$$

Fall 1: Normalfall $\boxed{a \neq 0}$. Lösung $x = \frac{3-b}{a}$.
Fall 2: Spezialfall $\boxed{a = 0}$. Man hat die Gleichung $0 = 3 - b$.
- **Fall 2.1**: $\boxed{b \neq 3}$. $\mathbb{L} = \varnothing$.
- **Fall 2.2**: $\boxed{b = 3}$. $\mathbb{L} = \mathbb{R}$.

b)

$$\begin{aligned} px-5 &= 2x+q && \mid -2x+5 \\ px-2x &= q+5 \\ x(p-2) &= q+5 \end{aligned}$$

Fall 1: Normalfall $\boxed{p-2\neq 0}$. Lösung $x=\frac{q+5}{p-2}$.
Fall 2: Spezialfall $p-2=0$, also $\boxed{p=2}$. Man hat die Gleichung $0=q+5$.
  Fall 2.1: $\boxed{q\neq -5}$. $\mathbb{L}=\varnothing$.
  Fall 2.2: $\boxed{q=-5}$. $\mathbb{L}=\mathbb{R}$.

c)

$$\begin{aligned} p^2x-px &= p^2-1 \\ x(p^2-p) &= p^2-1 \end{aligned}$$

Fall 1: Normalfall $p^2-p\neq 0$, d.h. $p(p-1)\neq 0$, d.h. $\boxed{p\neq 0 \text{ und } p\neq 1}$.
Lösung $x=\frac{p^2-1}{p^2-p}=\frac{(p+1)(p-1)}{p(p-1)}=\frac{p+1}{p}$.
Fall 2: Spezialfall $\boxed{p=0}$. Man hat die Gleichung $0=-1$, also $\mathbb{L}=\varnothing$.
Fall 3: Spezialfall $\boxed{p=1}$. Man hat die Gleichung $0=0$, also $\mathbb{L}=\mathbb{R}$.

Lösung zu Aufgabe 6.8 ex-lineare-wurzel-gleichungen

a)

$$\begin{aligned} \sqrt{3x+1} &= \sqrt{4x-1} && \mid (\cdot)^2 \quad \textbf{Gewinnumformung!} \\ 3x+1 &= 4x-1 && \mid -3x+1 \\ 2 &= x \end{aligned}$$

Probe: $\sqrt{3\cdot 2+1}=\sqrt{4\cdot 2-1}$, also $\sqrt{7}=\sqrt{7}$ und damit $\mathbb{L}=\{2\}$.

b)

$$\begin{aligned} \sqrt{x-5} &= \sqrt{7-x} && \mid (\cdot)^2 \quad \textbf{Gewinnumformung!} \\ x-5 &= 7-x && \mid +x+5 \\ 2x &= 12 && \mid :2 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Probe: $\sqrt{6-1}=\sqrt{7-6}$, also $\sqrt{1}=\sqrt{1}$ und damit $\mathbb{L}=\{6\}$.

c)

$$\begin{aligned} \sqrt{2x-6} &= \sqrt{8-5x} && \mid (\cdot)^2 \\ 2x-6 &= 8-5x && \mid +5x+6 \\ 7x &= 14 && \mid :7 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Probe: $\sqrt{4-6}=\sqrt{8-10}$, also $\sqrt{-2}=\sqrt{-2}$. Da Wurzeln nicht aus negativen Zahlen gezogen werden können, ist $\mathbb{L}=\{\}=\varnothing$.

d)

$$\begin{aligned} \sqrt{1+2x} &= x+1 && |(\cdot)^2 \\ 1+2x &= x^2+2x+1 && |-2x-1 \\ 0 &= x^2 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Probe: $\sqrt{1+2\cdot 0} = 0+1$, also $\sqrt{1} = 1$, also $1 = 1$, wahre Aussage. Also ist $\mathbb{L} = \{0\}$.

Lösung zu Aufgabe 6.9 ex-lineare-bruch-gleichungen

a)

$$\begin{aligned} \frac{5x}{2x-3} &= \frac{3x-10}{2x-3} && |\cdot(2x-3) \qquad \text{Achtung } 2x-3 \neq 0 \\ 5x &= 3x-10 && |-3x \\ 2x &= -10 && |:2 \\ x &= -5 \end{aligned}$$

Probe: $(2\cdot(-5)-3) = -13 \neq 0$, also $\mathbb{L} = \{-5\}$.

b)

$$\begin{aligned} \frac{2x}{7x-1} &= \frac{2-10x}{14x-2} && |\cdot 2\cdot(7x-1) \qquad \text{Achtung } 7x-1 \neq 0 \\ 2\cdot 2x &= 2-10x && |+10x \\ 14x &= 2 && |:14 \\ x &= \frac{1}{7} \end{aligned}$$

Probe: $7\cdot\frac{1}{7} - 1 = 0$, also ist $x = \frac{1}{7}$ keine Lösung der Ursprungsgleichung und damit $\mathbb{L} = \varnothing$.

c)

$$\begin{aligned} \frac{5x}{2x-3} &= \frac{5x-10}{2x-3} && |\cdot(2x-3) \qquad \text{Achtung } 2x-3 \neq 0 \\ 5x &= 5x-10 && |-5x \\ 0 &= -10 \end{aligned}$$

$\mathbb{L} = \varnothing$

Lösung zu Aufgabe 6.10 ex-lineare-gleichungen-texaufgaben-algebra1-s66ff-128

Unbekannte Zahl: z, Grundmenge $\mathbb{G} = \mathbb{N}$.
Ziffer 3 links hinzufügen ergibt: $300+z$
Ziffer 3 rechts hinzufügen ergibt: $10z+3$
Unterschied der Zahlen ist 333, also zwei Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} 300+z-(10z+3) &= 333 \\ 297-9z &= 333 && |-297 \\ -9z &= 36 && |:(-9) \\ z &= -4 \end{aligned}$$

$\mathbb{L} = \varnothing$ (die Lösung ist nicht natürlich).

$$\begin{aligned} 10z+3-(300+z) &= 333 \\ 9z-297 &= 333 && |+297 \\ 9z &= 630 && |:9 \\ z &= 70 \end{aligned}$$

$\mathbb{L} = \{70\}$. Da keine Gewinnumformungen gemacht wurden, ist die Probe mathematisch nicht nötig. Um Rechenfehler zu entdecken, ist die Probe aber doch sinnvoll: 703-370=333.

Lösung zu Aufgabe 6.11 ex-lineare-gleichungen-texaufgaben-algebra1-s66ff-138

Simones Alter heute: x [Jahre]. In 7 Jahren: $x+7$.

Alter Simones Tante heute: $5x$ [Jahre]. In 7 Jahren: $5x+7$.

$$\begin{aligned} 3(x+7) &= 5x+7 & \\ 3x+21 &= 5x+7 & \quad |-3x-7 \\ 14 &= 2x & \quad |:2 \\ 7 &= x & \end{aligned}$$

Simone ist heute 7 Jahre alt.

Lösung zu Aufgabe 6.12 ex-lineare-gleichungen-texaufgaben-algebra1-s66ff-144

1. Teil des Kapitals: x [Franken]. Jahreszins: $0.06x$.
2. Teil des Kapitals: $70350-x$. Jahreszins $0.05(70350-x)$.

$$\begin{aligned} 0.06x+0.05(70350-x) &= 4100 & \\ 0.01x+3517.5 &= 4100 & \quad |-3517.5 \\ 0.01x &= 582.5 & \quad |:0.01 \\ x &= 58250 & \end{aligned}$$

Der zu 6% verzinste Teil beträgt 58250 Franken, der zu 5% verzinste Teil 12100 Franken.

Lösung zu Aufgabe 6.13 ex-lineare-gleichungen-texaufgaben-algebra1-s66ff-163

Gesuchte Uhrzeit in Minuten nach 16 Uhr: x [min]

Winkel des Minutenzeigers: $6x$ [°] (12 Uhr = 0°)

Winkel des Stundenzeigers: $120+\frac{1}{2}x$ [°] (16 Uhr = 120°, pro Stunde 30°, also pro Minute 0.5°.)

Unterschied der Winkel muss 90 [°] sein. Es gibt also zwei Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} 6x-(120+\frac{1}{2}x) &= 90 & \\ \frac{11}{2}x-120 &= 90 & \quad |+120 \\ \frac{11}{2}x &= 210 & \quad |:\frac{11}{2} \\ x = \frac{420}{11} &\approx 38.182 & \end{aligned}$$

Der rechte Winkel entsteht ungefähr zur Zeit 16:38:10.91.

$$\begin{aligned} 120+\frac{1}{2}x-6x &= 90 & \\ -\frac{11}{2}x+120 &= 90 & \quad |-90+\frac{11}{2}x \\ 30 &= \frac{11}{2}x & \quad |:\frac{11}{2} \\ \frac{60}{11} &= x \approx 5.455 & \end{aligned}$$

Der rechte Winkel entsteht ungefähr zur Zeit 16:05:27.27.

Lösung zu Aufgabe 6.14 ex-lineare-gleichungen-texaufgaben-algebra1-s66ff-165

Fahrzeit des Zugs A bis zum Kreuzen: x [h]

Fahrzeit des Zugs B bis zum Kreuzen: $x-\frac{1}{4}$ [h]

Zurückgelegte Strecke von A ($s=v\cdot t$): $72x$ [km]

Zurückgelegte Strecke von B ($s=v\cdot t$): $88\left(x-\frac{1}{4}\right)$ [km]

$$\begin{aligned} 72x+88\left(x-\frac{1}{4}\right) &= 120 & \\ 160x-22 &= 120 & \quad |+22 \\ 160x &= 142 & \quad |:160 \\ x = 0.8875\,\mathrm{h} &= 53.2\,\mathrm{min} & \end{aligned}$$

Die Züge kreuzen sich nach 53 Minuten und 15 Sekunden, also um 15:53 Uhr und 15 Sekunden.

Lösung zu Aufgabe 6.15 ex-spezielle-nichtlineare-gleichungen

a)

$$(2x+7)\cdot(5x-8)\cdot(x^2+1)=0$$

Damit das Produkt Null ist, muss einer der Faktoren Null sein:

$$\begin{array}{rcrcr} 2x+7=0 & \text{oder} & 5x-8=0 & \text{oder} & x^2+1=0 \\ x=-\dfrac{7}{2} & & x=-\dfrac{8}{5} & & x^2=-1 \\ \mathbb{L}_1=\{-\dfrac{7}{2}\} & & \mathbb{L}_2=\{-\dfrac{8}{5}\} & & \mathbb{L}_3=\varnothing \end{array}$$

Und damit: $\mathbb{L}=\{-\frac{7}{2},-\frac{8}{5}\}$

b)

$$(x+4)(x^2-4)=0$$

Damit das Produkt Null ist, muss einer der Faktoren Null sein:

$$\begin{array}{rcr} x+4=0 & \text{oder} & x^2-4=0 \\ x=-4 & & x^2=4 \end{array}$$

Und damit: $\mathbb{L}=\{-4,-2,2\}$.

c)

$$\begin{aligned} x^3-2x^2+x&=0 \\ x(x-1)^2&=0 \end{aligned}$$

Damit das Produkt Null ist, muss einer der Faktoren Null sein:

$$x=0 \qquad \text{oder} \qquad x-1=0$$

Und damit: $\mathbb{L}=\{0,1\}$.

d)

$$\begin{aligned} x\cdot(x+6)&=-9 && \mid +9 \\ x^2+6x+9&=0 \\ (x+3)^2&=0 \\ x&=-3 \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 6.16 ex-gleichung-mit-parameterdiskussion a)

$$\begin{aligned} p(px-1) &= -2(1-2x) && |\text{TU} \\ p^2x - p &= -2+4x && |+p-4x \\ p^2x-4x &= p-2 && |\text{TU} \\ x(p^2-4) &= p-2 \end{aligned}$$

Fall 1: $p^2-4=0$, d.h. $\boxed{p=2 \text{ oder } p=-2}$
Fall 1.1 $\boxed{p=2}$. Eingesetzt erhält man $0=0$ und damit $\mathbb{L}=\mathbb{R}$.
Fall 1.1 $\boxed{p=-2}$. Eingesetzt erhält man $0=-4$ und damit $\mathbb{L}=\emptyset$.
Fall 2: $\boxed{p\neq 2 \text{ und } p\neq -2}$
In diesem Fall kann dividiert werden und man erhält

$$x=\frac{p-2}{p^2-4}=\frac{p-2}{(p+2)(p-2)}=\frac{1}{p+2}$$

wobei gekürzt werden darf, da $p\neq 2$.

b)

$$\begin{aligned} a(x-3) &= xb-2 && |\text{TU} \\ ax-3a &= xb-2 && |-xb+3a \\ ax-xb &= 3a-2 && |\text{TU} \\ x(a-b) &= 3a-2 \end{aligned}$$

Fall 1: $\boxed{a=b}$
Man erhält die Gleichung $0=3a-2$.
Fall 1.1: $\boxed{a=b=\frac{2}{3}}$, $\mathbb{L}=\mathbb{R}$
Fall 1.2: $\boxed{a=b \text{ und } a\neq\frac{2}{3}}$, $\mathbb{L}=\emptyset$
Fall 2: $\boxed{a\neq b}$
Man kann dividieren und erhält:

$$x=\frac{3a-2}{a-b}$$

c)

$$x^2 - ba^2 = 0 \qquad | + ba^2$$
$$x^2 = ba^2$$

Damit man die Wurzel ziehen kann, muss $b \geq 0$ sein.
Fall 1: $\boxed{b \geq 0}$
Achtung: Das beidseitige Wurzelziehen ist eine Verlustumformung. Man verliert die Gegenzahl der Wurzel, was man aber berücksichtigen kann:

$$x = \pm a\sqrt{b}$$

Fall 2: $\boxed{b < 0}$
Fall 2.1: $\boxed{b < 0 \text{ und } a = 0}$
In diesem Fall kann die Wurzel aus Null gezogen werden und man erhält

$$x = 0$$

Fall 2.2: $\boxed{b < 0 \text{ und } a \neq 0}$
In diesem Fall hat die Gleichung keine Lösung in $\mathbb{R}$, weil ein Quadrat niemals negativ sein kann (a^2 ist immer positiv). Also $\mathbb{L} = \emptyset$.

Lösung zu Aufgabe 6.17 ex-gleichungen-textaufgaben-schuelerbeitrag-lm

Unbekannte mit Masseinheit Vermögen von Max: x [CHF].

Aufstellen der Gleichung Vermögen Fabio: $x - 27$.
Vermögen Isabella: $x + 14$.
Alle zusammen: $x + (x - 27) + (x + 14) = 251$.

Lösen der Gleichung

$$\begin{aligned} x + (x-27) + (x+14) &= 251 && |\text{TU} \\ 3x - 13 &= 251 && | + 13 \\ 3x &= 264 && | : 3 \\ x &= 88 \end{aligned}$$

Antwortsatz Max besitzt CHF 88.

Lösung zu Aufgabe 6.18 ex-gleichungen-textaufgaben-schuelerbeitrag-lb

Unbekannte mit Masseinheit Höhe einer Stufe x [cm].

Aufstellen der Gleichung Höhe der Treppe jetzt: $34x$.
Höhe der Treppe nachher: $30(x + 2.7)$.
Die beiden Höhen sind gleich:

Lösen der Gleichung

$$\begin{aligned} 34x &= 30(x + 2.7) && |\text{TU} \\ 34x &= 30x + 81 && | - 30x \\ 4x &= 81 && | : 4 \\ x &= \frac{81}{3} \approx 20.33 \end{aligned}$$

Antwortsatz Eine Stufe misst $\frac{81}{3} \approx 20.33$ cm.

Lösung zu Aufgabe 6.19 ex-gleichungen-textaufgaben-schuelerbeitrag-ls

Unbekannte mit Masseinheit Gesuchte Anzahl Jahre früher: x [a].

Aufstellen der Gleichung Alter damals des jüngeren Bruders: $21 - x$.
Alter damals des älteren Bruders: $29 - x$.
Dreifaches Alter: $3(21 - x) = 29 - x$.

Lösen der Gleichung

$$\begin{aligned} 3(21-x) &= 29 - x && |\text{TU} \\ 63 - 3x &= 29 - x && | + 3x - 29 \\ 34 &= 2x && | : 2 \\ 17 &= x \end{aligned}$$

Antwortsatz Vor 17 Jahren war der jüngere Bruder 4 und der ältere 12 Jahre alt.

Lösung zu Aufgabe 6.20 ex-gleichungen-textaufgaben-schuelerbeitrag-cg

Unbekannte mit Masseinheit Alter von Timo in Jahren: x [a].

Aufstellen der Gleichung Alter von Leo: $\frac{x}{2}$.
Alter von Mia: $\frac{1}{12} \cdot \frac{x}{2} = \frac{x}{24}$.
Alter von Tim: $7 \cdot \frac{x}{24} = \frac{7x}{24}$.
Summe aller Alter in Jahren: 352.

Lösen der Gleichung

$$\begin{aligned} x + \frac{x}{2} + \frac{x}{24} + \frac{7x}{24} &= 352 && |\text{TU} \\ \frac{24x + 12x + x + 7x}{24} &= 352 && |\text{TU} \\ \frac{11}{6} \cdot x &= 352 && | \cdot \frac{6}{11} \\ x &= 192 \end{aligned}$$

Antwortsatz Timo ist also $6 \cdot 32 = 192$ Jahre alt.

Lösung zu Aufgabe 6.21 ex-gleichungen-textaufgaben-schuelerbeitrag-ln

$$\begin{aligned} \frac{x}{8} &= \sqrt[4]{x} && |(\cdot)^4 \quad \text{Achtung: Gewinnumformung} \\ \frac{x^4}{8^4} &= x && | : x \quad \text{Verlustumformung: } x = 0 \text{ ist ebenfalls eine Lösung!} \\ \frac{x^3}{8^4} &= 1 && | \cdot 8^4 \\ x^3 &= 2^{12} && |\sqrt[3]{\cdot} \quad x \text{ muss positiv sein, Wurzel darf gezogen werden} \\ x &= 2^4 = 16 \end{aligned}$$

Die gesuchte Zahl x ist entweder 16 oder 0.

Lösung zu Aufgabe 6.22 ex-gleichungen-textaufgaben-schuelerbeitrag-ok

Unbekannte mit Masseinheit Alter von Kiara in Jahren: x [a].

Aufstellen der Gleichung Alter der Mutter: $68 - x$.
Alter der Mutter von 13 Jahren: $68 - x - 13$.
Alter von Kiara in 3 Jahren: $3 + x$.

Lösen der Gleichung

$$\begin{aligned}
4(3+x) &= 68 - x - 13 && |\text{TU} \\
12 + 4x &= 55 - x && | + x - 12 \\
5x &= 43 && | : 5 \\
x &= 8.6
\end{aligned}$$

Antwortsatz Kiara ist heute 8.6 Jahre alt, Ihre Mutter 59.4.

Lösung zu Aufgabe 6.23 ex-gleichungen-textaufgaben-schuelerbeitrag-kb

Unbekannte mit Masseinheit Breite des Rechtecks: x [cm].

Aufstellen der Gleichung Länge des Rechtecks: $x + 20$.
Umfang: $2(x + x + 20)$

Lösen der Gleichung

$$\begin{aligned}
2(x + x + 20) &= 380 && |\text{TU} \\
4x + 40 &= 380 && | - 40 \\
4x &= 340 && | : 4 \\
x &= 85
\end{aligned}$$

Antwortsatz Das Rechteck ist 85 cm breit und 105 cm lang.

Lösung zu Aufgabe 6.24 ex-gleichungen-textaufgaben-schuelerbeitrag-ml

Die Masseinheit hier ist das Gewicht einer roten Kugel. Damit können wir nun das Gewicht der anderen Kugeln ausdrücken:

Gewicht einer organgen Kugel: o, also $4o = 3$ und damit $o = \frac{3}{4}$.
Gewicht einer grünen Kugel: g, also $2o = 3g$, also $\frac{3}{2} = 3g$ und damit $g = \frac{1}{2}$.
Eine grüne Kugel ist also halb so schwer wie eine rote. Es braucht also 4 grüne Kugeln, um 2 rote Kugeln auszutarieren.

Lösung zu Aufgabe 6.25 ex-gleichungen-textaufgaben-schuelerbeitrag-emu

Die Geschlechterverteilung unter den Geschwistern ist nicht klar. Der älteste Sohn könnte auch das jüngste Kind mit zwei älteren Schwestern sein.

Wir nehmen an, dass das jüngste Kind ein Mädchen, und das älteste ein Junge ist.

Unbekannte mit Masseinheit Alter in Jahren des mittleren Kindes: x [a].

Aufstellen der Gleichung Alter des jüngsten Kindes: 6.
Alter des ältesten Kindes: $30 - 6 - x = 24 - x$.
Alter des Vaters: $5((24 - x) - 1 - 6) = 5(17 - x) = 85 - 5x$.
Alter der Mutter: $22 + (24 - x) = 46 - x$.
Alter des Vaters bei Geburt des ersten Kindes: $85 - 5x - (24 - x) = 85 - 5x - 24 + x = 61 - 4x$.

Lösen der Gleichung

$$\begin{aligned}
61 - 4x &= 22 \cdot 1.5 && |\text{TU} \\
61 - 4x &= 33 && | - 33 + 4x \\
28 &= 4x && | : 4 \\
x &= 7
\end{aligned}$$

Antwortsatz Das mittlere Kind ist 7 Jahre alt.

Lösung zu Aufgabe 6.26 ex-gleichungen-textaufgaben-schuelerbeitrag-ak
Anzahl Bonbons Marvin $m = 8$, Anzahl Bonbons Kevin $k = 4$.
Übersetzen in eine Formel für die Anzahl Bonbons Marianne x:

$$x = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{Hälfte}} \cdot (m+k) \underbrace{\cdot}_{\text{Produkt}} x \underbrace{+}_{\text{Summe}} \underbrace{\sqrt{((k-1)^2)^2}}_{\text{Wurzel vom Quadrat vom Quadrat von der Differenz von Kevins Bonbons und 1}}$$

Setzt man für m und k die entsprechenden Werte ein erhält man

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot x + 9 && |\text{TU} \\ x &= 6x + 9 && | - x - 9 \\ -9 &= 5x && | : 5 \\ -\frac{9}{5} &= x \end{aligned}$$

Marianne schuldet noch jemandem 1.8 Bonbons.

Lösung zu Aufgabe 6.27 ex-gleichungen-textaufgaben-schuelerbeitrag-eme

Unbekannte mit Masseinheit Anzahl CDs: x.

Aufstellen der Gleichung Einnahmen: $7x$.
Ausgaben: 7'000.
Gewinn: 63'000

Lösen der Gleichung

$$\begin{aligned} 63000 &= 7x - 7000 && | + 7000 \\ 70000 &= 7x && | : 7 \\ 10000 &= x \end{aligned}$$

Antwortsatz Die Band produzierte 10'000 CDs.

Lösung zu Aufgabe 6.28 ex-gleichungen-textaufgaben-schuelerbeitrag-sg
Alle Unbekannten beschreiben das Alter in Jahren und sind natürliche Zahlen:
Karla a, Klaus l, Tomas t, Berta b, Hanna h und Mona m.
Gleichungen:

$$\begin{cases} 9l &= a + l + t + b + h + m \\ a &= 2.5h \\ h &= m + b \\ t &= 2m \\ m &= l(2) \\ b &= h + m - t \end{cases} \qquad (1)$$

6 Gleichungen reichen i.A. um 6 Variablen zu bestimmen. Die Vorgehensweise ist, eine Gleichung nach einer Variablen aufzulösen und diese in die anderen Gleichungen einzusetzen. So reduziert man immer um eine Variable und eine Gleichung.
Erst benutzen wir die Gleichungen (1) und (2) und setzen in die verbleibenden ein:

$$\begin{cases} 9l &= 2.5h + l + t + b + h + l \\ h &= l + b \\ t &= 2l \\ b &= h + l - t \end{cases} \qquad (3)$$

Wir setzen (3) ein:

$$\begin{cases} 9l &= 2.5h + l + 2l + b + h + l \\ h &= l + b \\ b &= h + l - 2l \end{cases} \qquad (4)$$

Wir setzen (4) ein

$$\begin{cases} 9l &= 2.5(l+b)+l+2l+b+l+b+l \\ b &= l+b+l-2l \end{cases}$$

Zusammenfassen:

$$\begin{cases} 9l &= 7.5l+4.5b & (5) \\ b &= b & (6) \end{cases}$$

Die Gleichung (6) ist eine wahre Aussage. D.h. das System hat unendlich viele Lösungen (konkret kann man z.B. b wählen und damit alles andere ausrechnen.)

Jetzt kommen die Zusatzbedingungen ins Spiel, nämlich, dass die Lösungen ganze Zahlen sein müssen und dass

$$a \geq l, t, b, h, m \qquad \text{und} \qquad a \leq 11 \qquad \text{und genau zwei Variablen sind} \geq 5$$

Weiter mit Gleichung (5):

$$\begin{aligned} 9l &= 7.5l+4.5b && \mid -7.5l \\ 1.5l &= 4.5b && \mid : 1.5 \\ l &= 3b \end{aligned}$$

D.h. das Alter l von Klaus ist ein Vielfaches von 3. Wir nehmen nun b als gegeben an, und drücken alle anderen Alter damit aus.

Aus Gleichung (4) erhalten wir: $h = 4b$.

Aus Gleichung (3) erhalten wir: $t = 2l = 6b$.

Aus Gleichung (1) erhalten wir: $a = 2.5h = 10b$.

Weil die Alter natürliche Zahlen kleiner als 11 sind, bleibt nur die Lösung $a = 10$ und $b = 1$. (Die Lösung $b = 0$ kann verworfen werden, weil Klara dann auch Null Jahre alt wäre und niemand älter als 5 Jahre wäre).

Damit haben wir folgende Lösung:

Karla 10, Klaus 3, Tomas 6, Berta 1, Hanna 4 und Mona 3.

7 Ungleichungen und Intervalle

Aufgabe 7.1 Lösen Sie folgende Ungleichungen:

a) $2x - 4 > 2$ b) $3x + 8 < 2$ c) $5x + 2 \leq 3x$ d) $2x - 3 \geq x + 1$

7.1 Intervalle

Um ganze Bereiche von **reellen** Zahlen anzugeben, wird die Schreibweise mit **Intervallen** verwendet. Beispiele:

$[\sqrt{2}, \pi]$	Alle Zahlen von und mit $\sqrt{2}$ bis und mit π.
$]3, 8.5]$	Alle Zahlen grösser als 3 (ohne die 3) bis und mit 8.5.
$[-4, -\frac{1}{2}[$	Alle Zahlen von und mit -4 bis $-\frac{1}{2}$ (ohne $-\frac{1}{2}$).
$]0, 1[$	Alle Zahlen zwischen 0 und 1 ohne 0 und 1.
$]-\infty, 5.13]$	Alle Zahlen kleiner oder gleich 5.13.
$]-3.57, \infty[$	Alle Zahlen grösser als -3.57 (ohne -3.57).

Merke

Intervalle sind **Mengen von reellen Zahlen** und werden mit eckigen Klammern geschrieben, wobei zuerst die untere Grenze und dann die obere Grenze angegeben wird (durch ein Komma getrennt). Ist die Klammer «richtig herum», gehört die Grenze dazu, das Intervall ist **geschlossen**. Andernfalls ist das Intervall **offen**. Da $-\infty$ und ∞ keine Zahlen sind, gehören diese nie zum Intervall und die Klammern sind immer «offen».

Aufgabe 7.2 Geben Sie die Lösungsmengen der Aufgabe 7.1 als Intervall an.

a) $x > 3$, also $\mathbb{L} =]3, \infty[$ b) $x < -2$, also $\mathbb{L} =]-\infty, -2[$

c) $x \leq -1$, also $\mathbb{L} =]-\infty, -1]$ d) $x \geq 4$, also $\mathbb{L} = [4, \infty[$

Aufgabe 7.3 Was ist die kleinste Zahl im Intervall $[3, 4[$? Was ist die grösste Zahl im Intervall $[3, 4[$?

7.2 Ungleichungen

Aufgabe 7.4 Lösen Sie folgende Ungleichungen, geben Sie die Lösungsmenge als Intervall an und überprüfen Sie dann Ihr Resultat durch Einsetzen einiger Zahlen der Lösungsmenge.

a) $-5x > 5$ b) $-\frac{x}{2} \leq -6$ c) $-x < 2$

7.2.1 Umformungen von Ungleichungen

Aufgabe 7.5 Erklären Sie schlüssig mit Hilfe einer Waage (eine Seite schwerer als die andere), warum bei Ungleichungen addieren und subtrahieren eines beliebigen Terms eine Äquivalenzumformung ist.

Aufgabe 7.6 Wie steht es mit der Multiplikation einer Ungleichung? Worauf ist zu achten? Erklären Sie ebenfalls mit Hilfe einer Waage (und finden Sie eine Interpretation für ein negatives Gewicht auf der Waage).

Aufgabe 7.7 Lösen Sie folgende Ungleichung auf zwei Arten: Einmal nur mit Addition/Subtraktion, einmal nur mit Multiplikation:

$$-x > 4$$

Merke

Bei Ungleichungen darf man uneingeschränkt addieren (und subtrahieren). Beim Multiplizieren (und Dividieren) mit einer ✎ negativen Zahl muss das Zeichen umgedreht werden.

7.3 Rechnen mit Bruchtermen

Merke

Vor der **Addition** (oder Subtraktion) von zwei Brüchen, müssen die Brüche erst **gleichnamig** gemacht werden, indem man sie **erweitert**. **Gleichnamige Brüche** werden addiert, indem man die **Zähler addiert**.

Merke

Es darf nur aus Produkten gekürzt werden. Die Faktoren selbst dürfen aber beliebig kompliziert sein.

Aufgabe 7.8 Falls möglich, faktorisieren Sie erst die Nenner! Machen Sie dann gleichnamig, fassen Sie zusammen, faktorisieren Sie und kürzen Sie, falls möglich.

a) $\dfrac{x+y}{x-y} - \dfrac{x-y}{x+y}$ b) $\dfrac{4}{z-1} + \dfrac{z-9}{z^2-1}$ c) $\dfrac{n}{n+1} - \dfrac{2n+1}{n-1} + \dfrac{n^2+5n}{n^2-1}$

d) $\dfrac{a}{a^2-b^2} + \dfrac{b}{(a-b)^2}$ e) $\dfrac{b-c}{a^2+ac} - \dfrac{a-b}{ac+c^2} + \dfrac{a^2+c^2}{a^2c+ac^2}$ f) $\dfrac{3s}{(s-2)^2} - \dfrac{2}{s} + \dfrac{s+4}{2s-s^2}$

Merke

Bruch mal Bruch, wie macht's der Kenner? Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner.
Es wird durch einen Bruch dividiert, indem man mit seinem Kehrwert multipliziert.

Aufgabe 7.9 Vereinfachen Sie soweit wie möglich. *Hinweis: Es ist oft besser, erst die Summe oder Differenz als einen Bruch zu schreiben, bevor multipliziert wird (anstatt auszumultiplizieren).*

a) $\dfrac{u^2-v^2}{u^2+v^2}\left(\dfrac{u}{u+v} + \dfrac{v}{u-v}\right)$ b) $\left(\dfrac{1}{r-s} - \dfrac{1}{r+s}\right)^2$

c) $\left(\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d}\right) : \left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d}\right)$ d) $\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) : \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$

e) $\left(a^2 + 2 + \dfrac{1}{a^2}\right) : \left(a^2 - \dfrac{1}{a^2}\right)$ f) $\dfrac{1}{n^2+2n+1} \cdot \left(\dfrac{n(n+1)}{2} + \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}\right)$

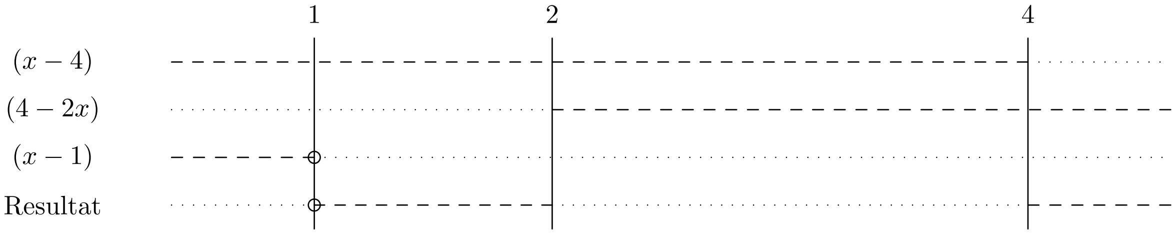
g) $\left(\dfrac{3n^2(n+1) - 2n(n^2+4)}{n+1} + 12\right) : (n^2+4) - \dfrac{2}{n+1} + \dfrac{1-n^2}{n^2+n}$

7.4 Vorzeichen von Produkten und Quotienten

Merke

Hat eine Ungleichung die Form «Produkt $<, \leq, \geq, > 0$», reicht es, die Vorzeichen der Faktoren zu untersuchen. Genau dann, wenn eine ungerade Anzahl Faktoren negativ sind, ist auch das Produkt negativ.

Beispiel: $\frac{(x-4)(4-2x)}{x-1} < 0$
Wir untersuchen die einzelnen Faktoren $(x-4)$, $(4-2x)$ und $(x-1)$ auf die Vorzeichen und zeichnen die Grenzen auf dem Zahlenstrahl auf:



Wir lesen nun die Intervalle ab, wo das Vorzeichen des Produkts negativ ist:
$\mathbb{L} =]1, 2[\cup]4, \infty[$

Merke

Die Grenzen von Termen im Nenner sind **immer** auszuschliessen (Division durch Null). Sonst sind die Grenzen einzuschliessen, wenn das Vergleichszeichen ≤ 0 oder ≥ 0 ist.

Aufgabe 7.10 Geben Sie die Lösungsmengen für das Beispiel an, wenn das Zeichen zu a) $\leq$, b) $\geq$ und c) $>$ geändert wird.
a) $\mathbb{L} =]1, 2] \cup [4, \infty[$ b) $\mathbb{L} =]-\infty, 1[\cup [2, 4]$ c) $\mathbb{L} =]-\infty, 1[\cup]2, 4[$

Aufgabe 7.11 Lösen Sie folgende Ungleichungen. Wenn nötig, bringen Sie zuerst alles auf eine Seite, fassen Sie auf einen Bruchstrich zusammen und faktorisieren Sie.

a) $\frac{(x^4-4)}{(3-x)(x^2+1)} \geq 0$

b) $\frac{x^3-6x^2+9x}{x^2-1} \leq 0$

c) $\frac{x+8}{x+6} + \frac{x}{2} < 0$

d) $\frac{1}{x+2} > \frac{4x-3}{5x+3}$

7.5 Faktorisieren

Insbesondere bei Bruchgleichungen oder Gleichungen der Form «Produkt=Null» ist es nützlich, quadratische Polynome faktorisieren zu können.
Wir beschränken uns hier auf quadratische Polynome der Form

$$x^2 + ax + b \qquad \text{mit } a, b \in \mathbb{Z}.$$

Ziel ist es, folgende Faktorisierung zu finden, falls diese existiert:

$$(x + c)(x + d) \qquad \text{mit } c,\, d \in \mathbb{Z}$$

Aufgabe 7.12 Multiplizieren Sie das Produkt oben aus und vergleichen Sie es mit dem quadratischen Polynom. Beschreiben Sie den Zusammenhang der Parameter a und b in Abhängigkeit von c und d.

Merke

Ganzzahliges Faktorisieren Ist ein quadratische Polynom der Form $x^2 + ax + b$ zu faktorisieren, sucht man zwei Zahlen so, dass ✎ das Produkt der Zahlen gleich b und die Summe gleich a ist.

Aufgabe 7.13 Faktorisieren Sie:

a) $x^2 + 18x + 72$
b) $x^2 + 24x + 135$
c) $x^2 + 24x + 135$
d) $x^2 + 27x + 180$
e) $x^2 + 18x + 72$
f) $x^2 + 22x + 120$
g) $x^2 + 17x + 72$
h) $x^2 + 24x + 135$
i) $x^2 + 16x + 60$

Aufgabe 7.14 Faktorisieren Sie:

a) $x^2 - 64$
b) $x^2 + x - 72$
c) $x^2 - 20x + 96$
d) $x^2 - 17x + 72$
e) $x^2 - 23x + 120$
f) $x^2 - 7x - 120$
g) $x^2 - 18x + 80$
h) $x^2 - 20x + 96$
i) $x^2 - 5x - 150$

Aufgabe 7.15 Faktorisieren Sie:

a) $-3x^2y^3 - 51xy^3 - 216y^3$
b) $-5w^3x^2 - 105w^3x - 450w^3$
c) $-2nx^2 + 2nx + 180n$
d) $-7ax^2 + 42ax + 945a$
e) $-2cx^2 - 8cx + 192c$
f) $-7e^2x^2 + 140e^2x - 672e^2$
g) $-2bx^2 + 200b$
h) $-5f^2x^2 - 105f^2x - 450f^2$
i) $-3a^3x^2 + 27a^3x + 270a^3$

Aufgabe 7.16 Lösen Sie folgende Gleichungen:

a) $\left(x^2 - 16\right)\left(x^2 - x - 30\right)\left(x^2 - 4x + 4\right) = 0$
b) $(x - 2) \cdot 4x^2 - 8(x - 2) = 0$
c) $\left(x^2 - 9\right) \cdot 7x^3 - 42x^2 \cdot \left(x^2 - 9\right) = 945x(x - 3)(x + 3)$

Aufgabe 7.17 Lösen Sie folgende Ungleichungen:

a) $\dfrac{x}{x^2 - 11x - 42} + \dfrac{1}{x^2 + 7x + 12} \le 0$

7.6 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: “If you want to nail it, you’ll need it”.

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe 7.1 ex-ungleichungen-einfacher-einstieg

a)
$$\begin{aligned} 2x-4&>2 \quad &|+4\\ 2x&>6 \quad &|:2\\ x&>3 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 3x+8&<2 \quad &|-8\\ 3x&<-6 \quad &|:3\\ x&<-2 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 5x+2&\leq 3x \quad &|-3x-2\\ 2x&\leq -2 \quad &|:2\\ x&\leq -1 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 2x-3&\geq x+1 \quad &|-x+3\\ x&\geq 4 \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 7.4 ex-ungleichungen-aufgepasst

a)
$$\begin{aligned} -5x&>5 \quad &|:-5 \quad ⚠\\ x&<-1\\ \mathbb{L}&=]-\infty,-1[\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} -\frac{x}{2}&\leq -6 \quad &|\cdot -2 \quad ⚠\\ x&\geq 12\\ \mathbb{L}&=[12,\infty[\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} -x&<2 \quad &|\cdot(-1) \quad ⚠\\ x&>-2\\ \mathbb{L}&=]-2,\infty[\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 7.8 ex-bruchterme-addition

a) $\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{(x+y)^2-(x-y)^2}{(x+y)(x-y)}=\dfrac{4xy}{(x+y)(x-y)}$

b) $\dfrac{4}{z-1}+\dfrac{z-9}{z^2-1}=\dfrac{4}{z-1}+\dfrac{z-9}{(z+1)(z-1)}=\dfrac{4(z+1)+z-9}{(z+1)(z-1)}=\dfrac{4z+4+z-9}{(z+1)(z-1)}\dfrac{5z-5}{(z+1)(z-1)}=\dfrac{5(z-1)}{(z+1)(z-1)}=\dfrac{5}{(z+1)}$

c) $\dfrac{n}{n+1}-\dfrac{2n+1}{n-1}+\dfrac{n^2+5n}{n^2-1}=\dfrac{n}{n+1}-\dfrac{2n+1}{n-1}+\dfrac{n^2+5n}{(n+1)(n-1)}=\dfrac{n(n-1)-(2n+1)(n+1)+(n^2+5n)}{(n+1)(n-1)}=\dfrac{n^2-n-(2n^2+3n+1)+n^2+5n}{(n+1)(n-1)}=\dfrac{n^2-n-2n^2-3n-1+n^2+5n}{(n+1)(n-1)}=\dfrac{n-1}{(n+1)(n-1)}=\dfrac{1}{n+1}$

d) $\dfrac{a}{a^2-b^2}+\dfrac{b}{(a-b)^2}=\dfrac{a}{(a+b)(a-b)}+\dfrac{b}{(a-b)^2}=\dfrac{a(a-b)}{(a+b)(a-b)^2}+\dfrac{b(a+b)}{(a+b)(a-b)^2}=\dfrac{a(a-b)+b(a+b)}{(a+b)(a-b)^2}=\dfrac{a^2-ab+ab+b^2}{(a+b)(a-b)^2}=\dfrac{a^2+b^2}{(a+b)(a-b)^2}$

e) $\dfrac{b-c}{a^2+ac} - \dfrac{a-b}{ac+c^2} + \dfrac{a^2+c^2}{a^2c+ac^2} = \dfrac{b-c}{a(a+c)} - \dfrac{a-b}{c(a+c)} + \dfrac{a^2+c^2}{ac(a+c)} = \dfrac{c(b-c)-a(a-b)+(a^2+c^2)}{ac(a+c)} = \dfrac{cb-c^2-(a^2-ab)+a^2+c^2}{ac(a+c)} = \dfrac{cb-a^2+ab+a^2}{ac(a+c)} = \dfrac{cb+ab}{ac(a+c)} = \dfrac{b(c+a)}{ac(a+c)} = \dfrac{b}{ac}$

f) $\dfrac{3s}{(s-2)^2} - \dfrac{2}{s} + \dfrac{s+4}{2s-s^2} = \dfrac{3s}{(s-2)^2} - \dfrac{2}{s} + \dfrac{s+4}{s(2-s)} = \dfrac{3s}{(s-2)^2} - \dfrac{2}{s} - \dfrac{s+4}{s(s-2)} = \dfrac{3s^2-2(s-2)^2-(s+4)(s-2)}{s(s-2)^2} = \dfrac{3s^2-2(4-4s+s^2)-(s^2+2s-8)}{s(s-2)^2} = \dfrac{3s^2-(8-8s+2s^2)-s^2-2s+8}{s(s-2)^2} = \dfrac{3s^2-8+8s-2s^2-s^2-2s+8}{s(s-2)^2} = \dfrac{6s}{s(s-2)^2} = \dfrac{6}{(s-2)^2}$
Hinweis: Anstatt Vorzeichenakrobatik $(2-s) = -(2-s)$, könnte man auch einfach $(2-s)^2 = (-(s-2))^2 = (s-2)^2$ verwenden.

Lösung zu Aufgabe 7.9 ex-bruchterme-querbeet

a) $\dfrac{u^2-v^2}{u^2+v^2}\left(\dfrac{u}{u+v}+\dfrac{v}{u-v}\right) = \dfrac{(u+v)(u-v)}{u^2+v^2}\left(\dfrac{u(u-v)}{(u+v)(u-v)}+\dfrac{v(u+v)}{(u+v)(u-v)}\right) = \dfrac{(u+v)(u-v)}{u^2+v^2}\left(\dfrac{u^2-uv+uv+v^2}{(u+v)(u-v)}\right) = \dfrac{(u+v)(u-v)}{u^2+v^2}\cdot\dfrac{u^2+v^2}{(u+v)(u-v)} = 1$

b) $\left(\dfrac{1}{r-s}-\dfrac{1}{r+s}\right)^2 = \left(\dfrac{r+s}{(r-s)(r+s)}-\dfrac{r-s}{(r+s)(r-s)}\right)^2 = \left(\dfrac{r+s-(r-s)}{(r-s)(r+s)}\right)^2 = \left(\dfrac{2s}{(r-s)(r+s)}\right)^2 = \dfrac{4s^2}{(r-s)^2(r+s)^2}$

c) $\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{d}\right) : \left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}\right) = \dfrac{ad-bc}{bd} : \dfrac{ad+cb}{bd} = \dfrac{ad-bc}{bd}\cdot\dfrac{bd}{ad+cb} = \dfrac{ad-bc}{ad+cb}$

d) $\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right) : \left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{n^2-1}{n^2} : \dfrac{n+1}{n} = \dfrac{(n+1)(n-1)}{n^2}\cdot\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{n-1}{n}$

e) $\left(a^2+2+\dfrac{1}{a^2}\right) : \left(a^2-\dfrac{1}{a^2}\right) = \left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2 : \left(a+\dfrac{1}{a}\right)\left(a-\dfrac{1}{a}\right) = \left(a+\dfrac{1}{a}\right) : \left(a-\dfrac{1}{a}\right) = \dfrac{a^2+1}{a} : \dfrac{a^2-1}{a} = \dfrac{a^2+1}{a}\cdot\dfrac{a}{a^2-1} = \dfrac{a^2+1}{(a+1)(a-1)}$

f) $\dfrac{1}{n^2+2n+1}\cdot\left(\dfrac{n(n+1)}{2}+\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}\right) = \dfrac{1}{(n+1)^2}\cdot\left(\dfrac{n^2+n+n^2+3n+2}{2}\right) = \dfrac{1}{(n+1)^2}\cdot\left(\dfrac{2n^2+4n+2}{2}\right) = \dfrac{1}{(n+1)^2}\cdot\left(\dfrac{2(n^2+2n+1)}{2}\right) = \dfrac{1}{(n+1)^2}\cdot(n+1)^2 = 1$

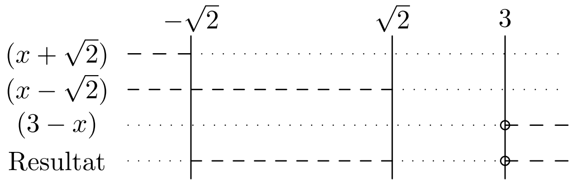
g) $\left(\dfrac{3n^2(n+1)-2n(n^2+4)}{n+1}+12\right) : (n^2+4) - \dfrac{2}{n+1} + \dfrac{1-n^2}{n^2+n} = \left(3n^2 - \dfrac{2n(n^2+4)}{n+1}+12\right) : (n^2+4) - \dfrac{2}{n+1} + \dfrac{(1+n)(1-n)}{n(n+1)} = \dfrac{3n^2}{n^2+4} - \dfrac{2n}{n+1} + \dfrac{12}{n^2+4} - \dfrac{2}{n+1} + \dfrac{1-n}{n} = \dfrac{3n^2+12}{n^2+4} - \dfrac{2n+2}{n+1} + \dfrac{1-n}{n} = \dfrac{3(n^2+4)}{n^2+4} - \dfrac{2(n+1)}{n+1} + \dfrac{1-n}{n} = 3-2+\dfrac{1-n}{n} = 1+\dfrac{1-n}{n} = \dfrac{n}{n}+\dfrac{1-n}{n} = \dfrac{n+1-n}{n} = \dfrac{1}{n}$

Lösung zu Aufgabe 7.11 ex-ungleichungen-vorzeichen

a)

$$\frac{(x^4-4)}{(3-x)(x^2+1)} \geq 0$$
$$\frac{(x^2+2)(x^2-2)}{(3-x)(x^2+1)} \geq 0$$
$$\frac{(x^2+2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{(3-x)(x^2+1)} \geq 0$$

(x^2+2) und (x^2+1) sind immer positiv (weil x^2 immer positiv oder Null ist) und können daher ignoriert werden.

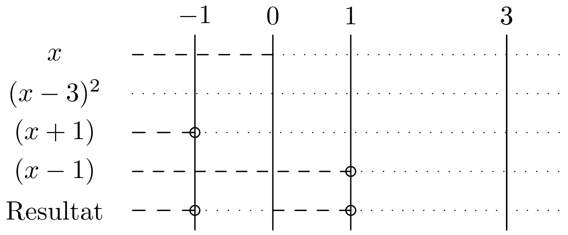


$\mathbb{L} =]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 3[$
$x=3$ ist nicht Teil der Lösungsmenge, weil $(x-3)$ im Nenner vorkommt.

b)

$$\frac{x^3-6x^2+9x}{x^2-1} \leq 0$$
$$\frac{x(x-3)^2}{(x+1)(x-1)} \leq 0$$

$(x-3)^2$ ist zwar nie negativ wird aber 0 (für $x=3$).



$\mathbb{L} =]-\infty, -1[\cup [0, 1[\cup \{3\}$
$x=3$ ist Teil der Lösungsmenge weil $(x-3)^3$ dort 0 ist. Anstatt $\{3\}$ könnte auch $[3,3]$ geschrieben werden.

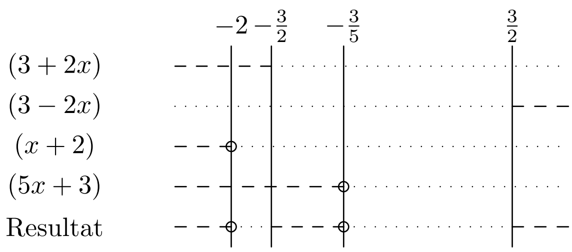
c)

$$\frac{x+8}{x+6} + \frac{x}{2} < 0$$
$$\frac{2(x+8)}{2(x+6)} + \frac{x(x+6)}{2(x+6)} < 0$$
$$\frac{2x+16}{2(x+6)} + \frac{x^2+6x}{2(x+6)} < 0$$
$$\frac{2x+16+x^2+6x}{2(x+6)} < 0$$
$$\frac{x^2+8x+16}{2(x+6)} < 0$$
$$\frac{(x+4)^2}{2(x+6)} < 0$$

$(x+4)^2$ ist nie negativ, es reicht also $(x+6)$ zu betrachten.
$\mathbb{L} =]-\infty, -6[$

d)

$$\frac{1}{x+2} > \frac{4x-3}{5x+3} \quad \Big| - \frac{4x-3}{5x+3}$$
$$\frac{1}{x+2} - \frac{4x-3}{5x+3} > 0$$
$$\frac{5x+3}{(x+2)(5x+3)} - \frac{(x+2)(4x-3)}{(x+2)(5x+3)} > 0$$
$$\frac{5x+3-(4x^2+5x-6)}{(x+2)(5x+3)} > 0$$
$$\frac{5x+3-4x^2-5x+6}{(x+2)(5x+3)} > 0$$
$$\frac{-4x^2+9}{(x+2)(5x+3)} > 0$$
$$\frac{(3+2x)(3-2x)}{(x+2)(5x+3)} > 0$$



$\mathbb{L} = \left]-2, -\frac{3}{2}\right[\cup \left]-\frac{3}{5}, \frac{3}{2}\right[$

Lösung zu Aufgabe 7.13 ex-faktorisieren-nur-positiv

a) $(x+12)\cdot(x+6)$ b) $(x+9)\cdot(x+15)$ c) $(x+9)\cdot(x+15)$

d) $(x+12)\cdot(x+15)$ e) $(x+12)\cdot(x+6)$ f) $(x+10)\cdot(x+12)$

g) $(x+9)\cdot(x+8)$ h) $(x+15)\cdot(x+9)$ i) $(x+10)\cdot(x+6)$

Lösung zu Aufgabe 7.14 ex-faktorisieren-auch-negativ

a) $(x-8)\cdot(x+8)$ b) $(x-8)\cdot(x+9)$ c) $(x-8)\cdot(x-12)$

d) $(x-8)\cdot(x-9)$ e) $(x-15)\cdot(x-8)$ f) $(x-15)\cdot(x+8)$

g) $(x-8)\cdot(x-10)$ h) $(x-8)\cdot(x-12)$ i) $(x-15)\cdot(x+10)$

Lösung zu Aufgabe 7.15 ex-faktorisieren-zusatzfaktor

a) $-3y^3\left(x^2+17x+72\right)=-3y^3\,(x+9)\cdot(x+8)$

b) $-5w^3\left(x^2+21x+90\right)=-5w^3\,(x+6)\cdot(x+15)$

c) $-2n\left(x^2-x-90\right)=-2n\,(x-10)\cdot(x+9)$

d) $-7a\left(x^2-6x-135\right)=-7a\,(x+9)\cdot(x-15)$

e) $-2c\left(x^2+4x-96\right)=-2c\,(x+12)\cdot(x-8)$

f) $-7e^2\left(x^2-20x+96\right)=-7e^2\,(x-12)\cdot(x-8)$

g) $-2b\left(x^2-100\right)=-2b\,(x+10)\cdot(x-10)$

h) $-5f^2\left(x^2+21x+90\right)=-5f^2\,(x+15)\cdot(x+6)$

i) $-3a^3\left(x^2-9x-90\right)=-3a^3\,(x-15)\cdot(x+6)$

Lösung zu Aufgabe 7.16 ex-gleichungen-produkt-gleich-null

a)

$$(x+4)(x-4)(x-6)(x+5)(x-2)^2=0$$

Alle x, die einen der Faktoren zu Null machen, sind eine Lösung der Gleichung. Damit ist $\mathbb{L}=\{-4,4,6,-5,2\}$.

b)

$$(x-2)\left(4x^2-8\right)=(x-2)\cdot 4\cdot\left(x^2-2\right)=4(x-2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=0$$

$\mathbb{L}=\{-\sqrt{2},\sqrt{2},2\}$.

c)

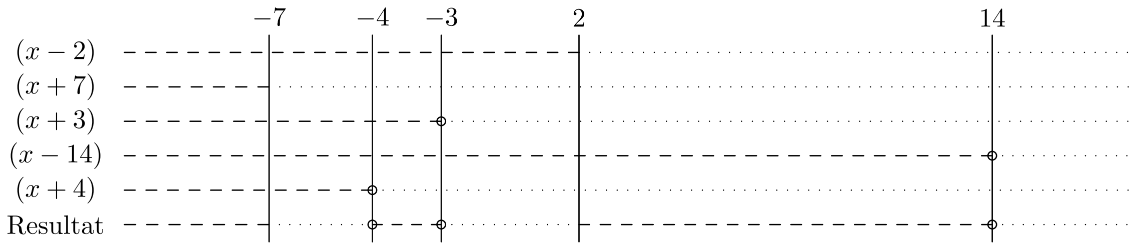
$$\begin{aligned}
(x+3)(x-3)\cdot 7x^3-42x^2\cdot(x+3)(x-3)&=945x(x-3)(x+3) && |-945x(x-3)(x+3)\\
(x+3)(x-3)\cdot 7x^3-42x^2\cdot(x+3)(x-3)-945x(x-3)(x+3)&=0 && |\text{TU}\\
(x+3)(x-3)\left(7x^3-42x^2-945x\right)&=0 && |\text{TU}\\
7x(x+3)(x-3)\cdot\left(x^2-6x-135\right)&=0 && |\text{TU}\\
7x(x+3)(x-3)(x+9)(x-15)&=0
\end{aligned}$$

$\mathbb{L}=\{0,-3,3,-9,15\}$.

Lösung zu Aufgabe 7.17 ex-ungleichungen-produkt-ungleich-null

a)

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{x^2-11x-42}+\frac{1}{x^2+7x+12} &\leq 0 && |\text{TU}\\
\frac{x}{(x+3)(x-14)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)} &\leq 0 && |\text{TU}\\
\frac{x(x+4)+(x-14)}{(x+3)(x-14)(x+4)} &\leq 0 && |\text{TU}\\
\frac{x^2+5x-14}{(x+3)(x-14)(x+4)} &\leq 0 && |\text{TU}\\
\frac{(x-2)(x+7)}{(x+3)(x-14)(x+4)} &\leq 0
\end{aligned}
$$



Man liest ab: $\mathbb{L} =]-\infty, -7] \cup\,]-4, -3[\,\cup [2, 14[$.

8 Satzgruppe des Pythagoras

8.1 Bruchverbrechen

Aufgabe 8.1 Falls ein Fehler vorhanden ist, erklären und korrigieren Sie diesen. Wenn kein Fehler vorhanden ist, erklären Sie, wie man das einfacher machen könnte.

a) $2 \cdot \dfrac{ab}{a^2-b^2} = \dfrac{2ab}{2a^2-2b^2}$

b) $\dfrac{b}{a+b} \cdot \dfrac{a}{a-b} = \dfrac{b(a-b)}{a^2-b^2} \cdot \dfrac{a(a+b)}{a^2-b^2}$

c) $\dfrac{b(a-b)}{a^2-b^2} \cdot \dfrac{a(a+b)}{a^2-b^2} = \dfrac{b(a-b)\cdot a(a+b)}{a^2-b^2}$

d) $\dfrac{a^2+ab}{a^2-b^2} - \dfrac{ab-b^2}{a^2-b^2} = \dfrac{a^2+ab-ab-b^2}{a^2-b^2} = \dfrac{a^2-b^2}{a^2-b^2} = 1$

e) $\dfrac{\cancel{a-b}}{a^2-ab} : \dfrac{b^2-ab}{\cancel{a-b}} = \dfrac{1}{a^2-ab} : \dfrac{b^2-ab}{1}$

f) $\dfrac{1}{a^2-ab} - \dfrac{b^2-ab}{1} = \dfrac{1}{a^2-ab} - b^2 - ab$

g) $\dfrac{a+b}{a-b} + \dfrac{a-b}{a+b} - 2 \cdot \dfrac{a^2}{a^2-b^2} = \dfrac{(a+b)^2}{a^2-b^2} + \dfrac{(a-b)^2}{a^2-b^2} - \dfrac{2(a^2-b^2)}{a^2-b^2} \cdot \dfrac{a^2}{a^2-b^2} = \dfrac{(a+b)^2+(a-b)^2-2(a^2-b^2)}{a^2-b^2} \cdot \dfrac{a^2}{a^2-b^2}$

h) $\dfrac{a}{a^4+b^4} = \dfrac{a}{a(a^3+b^4)} = \dfrac{1}{a^3+b^4}$

i) $\dfrac{\cancel{(a+b)}+ab}{\cancel{(a+b)}-ab} = \dfrac{ab}{-ab} = -1$

j)
$$\begin{aligned} \frac{4x-5}{6} &= x + \frac{5}{6} && \mid \cdot 6 \\ 4x-5 &= x+5 \end{aligned}$$

k)
$$\begin{aligned} \frac{4x+7}{6} &= \frac{4+5x}{6} && \mid -4x-4 \\ \frac{3}{6} &= \frac{x}{6} \end{aligned}$$

l) Seien a und b zwei reelle Zahlen. Was lässt sich über die Vorzeichen von a und b aussagen, wenn man weiss, dass $a \cdot b < 0$?

m) Seien a und b zwei reelle Zahlen von denen man weiss, dass $a \cdot b < 2$. Was lässt sich über die Vorzeichen von a und b aussagen?

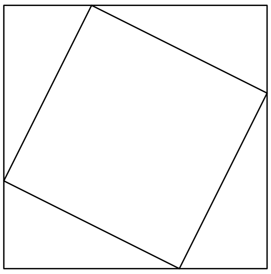
8.2 Satzgruppe des Pythagoras

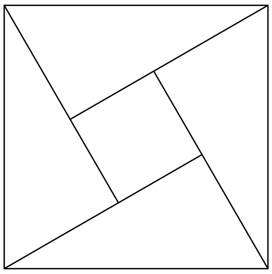
Satz 1 Satz des Pythagoras

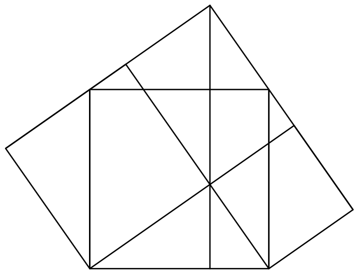
✎ In einem rechtwinkligen Dreieck mit Katheten a und b und Hypotenuse c gilt:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Aufgabe 8.2 Beweisen Sie den Satz von Pythagoras mit folgenden Skizzen:

a)


b)


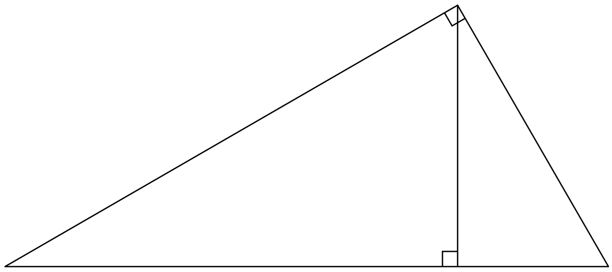
c)


8.2.1 Höhen- und Kathetensatz

Um den **Höhensatz** herzuleiten, drücken Sie c^2 einmal mit a, b und einmal mit p, q aus, setzen Sie die beiden Ausdrücke gleich und isolieren Sie das Produkt pq.

✎

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= (p+q)^2 \\ a^2+b^2 &= p^2+2pq+q^2 \quad \mid -p^2-q^2 \\ (a^2-p^2)+(b^2-q^2) &= 2pq \\ 2h^2 &= 2pq \quad \mid :2 \\ h^2 &= pq \end{aligned}$$



✎

$$\begin{aligned} p^2+h^2 &= a^2 \\ p^2+pq &= a^2 \\ p(p+q) &= a^2 \\ pc &= a^2 \end{aligned}$$

Für den **Kathetensatz**, drücken Sie a^2 mit h und p aus und ersetzen Sie h^2 mit Hilfe des Höhensatzes und klammern Sie p aus:

Satz 2 Höhen- und Kathetensatz

In einem rechtwinkligen Dreieck teilt die Höhe h auf die Hypotenuse c diese in zwei **Hypotenusenabschnitte**, p und q (wobei p näher bei a liegt). Es gilt:

Höhensatz: $pq = h^2$ **Kathetensatz:** $cp = a^2$ und $cq = b^2$

Aufgabe 8.3 In einem rechtwinkligen Dreieck teilt die Höhe h auf die Seite c diese in zwei Hypotenusenabschnitte, p und q, wobei p näher bei a liegt. Von den sechs Strecken a, b, c, h, p und q sind jeweils zwei gegeben. Finden Sie Formeln, um daraus die anderen vier zu berechnen.

a) a, b b) a, p c) p, q d) p, c

Aufgabe 8.4 Der Höhensatz und der Kathetensatz können für die konstruktive Verwandlung von Rechtecken in flächengleiche Quadrate gebraucht werden.

a) Konstruieren Sie mit Hilfe des Höhensatzes ein Quadrat, das die gleiche Fläche wie ein gegebenes Rechteck hat.

b) Konstruieren Sie mit Hilfe des Kathetensatzes ein Quadrat, das die gleiche Fläche wie ein gegebenes Rechteck hat.

c) Gegeben ist ein Quadrat mit Seitenlänge s und eine Streckenlänge x. Konstruieren Sie mit Hilfe des Höhensatzes ein Rechteck mit Seitenlänge x und gleicher Fläche wie das Quadrat.

d) Gegeben ist ein Quadrat mit Seitenlänge s und eine Streckenlänge x. Konstruieren Sie mit Hilfe des Kathetensatzes ein Rechteck mit Seitenlänge x und gleicher Fläche wie das Quadrat. Was ist zu beachten?

8.3 Spezielle rechtwinklige Dreiecke

Aufgabe 8.5 Ein rechtwinklig gleichschenkliges Dreieck hat die Hypotenuse c und die Katheten $a = b$.

a) Berechnen Sie c, wenn a gegeben ist.

b) Berechnen Sie a, wenn c gegeben ist.

Aufgabe 8.6 In einem Dreieck mit den Innenwinkeln $30°$, $60°$, $90°$ sei c die Hypotenuse, a die kürzere und b die längere Kathete.
Wenn jeweils eine der drei Längen gegeben ist, berechnen Sie daraus die anderen beiden.

8.4 Reguläres Tetraeder

Das Tetraeder ist ein **platonischer Körper** bestehend aus 4 gleichseitigen Dreiecken mit Seitenlänge s.

Anzahl Flächen:

Kanten:

Anzahl Ecken:

Seitenhöhe:

Körperhöhe:

Aufgabe 8.7 *Folgende Aufgaben sind grösstenteils aus der Aufgabensammlung von Angelika Rupflin der Kantonsschule am Burggraben St. Gallen*

1. Gegeben sind zwei Quadrate mit den Seitenlängen 3 cm und 5 cm. Konstruieren Sie ein Quadrat dessen Flächeninhalt a) mit der Summe b) mit der Differenz der Inhalte der beiden Quadrate übereinstimmt.
2. Zeichnen Sie ein Quadrat mit der Seitenlänge $a = 3$ cm und konstruieren Sie dann ein Quadrat, das a) den halben, b) den doppelten, c) den dreifachen Inhalt wie das ursprüngliche hat.
3. Konstruieren Sie (ausgehend von ganzzahligen Streckenlängen) auf mindestens 2 verschiedene Weisen ein Quadrat mit dem Flächeninhalt
   a) 5 cm^2 b) 27 cm^2
4. Welchen Radius muss ein rundes Backblech mindestens haben, um eine rechteckige Tiefkühlpizza mit den Abmessungen 22 cm × 17 cm in den Ofen zu schieben.
5. Berechnen Sie die theoretische Blickweite von einem 100 m hohen Leuchtturm aufs Meer. (Erdradius $6.37 \cdot 10^6$ m)
6. Wie weit unter Wasser liegt die gerade Verbindungslinie von Romanshorn nach Friedrichshafen? Machen Sie eine Skizze. Erdradius: 6370 km.
7. Wie hoch darf ein 60 cm tiefer Schrank höchstens sein, damit man ihn aus der liegenden Position in einem 2.4 m hohen Raum durch Kippen aufstellen kann?
8. Berechnen Sie die Länge aller Seitenhalbierenden in einem rechtwinkligen Dreieck aus den Kathetenlängen a und b. a) $a = 6$ und $b = 10$ b) allgemein mit Parametern a und b
9. Von einem allgemeinen Dreieck ABC kennt man die Seite $c = 56$ cm, die Höhe $h_c = 15$ cm und die Seitenhalbierende $s_c = 17$ cm. Berechnen Sie die Länge der Seiten a und b.
10. Gegeben sei eine Strecke der Länge a.
    Konstruieren Sie a) $\sqrt{61}a$ b) $\sqrt{153}a$ c) $\sqrt{7}a$
11. Gegeben sind die Punkte $A = (-3, -2)$, $B = (6, 1)$ und $C = (-5, 4)$. Prüfen Sie durch Rechnung, ob das Dreieck ABC rechtwinklig ist. (Achtung: Hier ist keine Zeichnung verlangt!)
12. Überprüfen Sie durch Rechnung, ob das Dreieck ABC mit $A = (2, 1)$, $B = (1, 10)$ und $C = (6, 5)$ rechtwinklig ist und geben Sie den Flächeninhalt an! (Keine Zeichnung!)
13. Verwandeln Sie ein Dreieck mit den Seiten 3 cm, 4 cm, 5 cm in ein flächengleiches Quadrat.

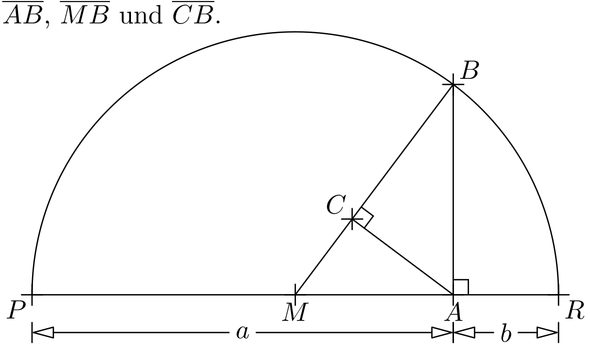
14. Verwandeln Sie ein Quadrat mit Seitenlänge 7.5 cm in ein flächengleiches Rechteck, dessen eine Seite 5.5 cm lang ist. Erläutere kurz dein Vorgehen!

15. Ein Matrose sitzt auf hoher (und ruhiger) See im Ausguck eines Schiffes 25 m über dem Wasser. In welcher Entfernung (Luftlinie) sieht er frühestens
    a) eine auf dem Wasser treibende Luftmatratze?
    b) einen anderen Matrosen, der seinerseits in einem Ausguck 30 m über der Wasseroberfläche sitzt?

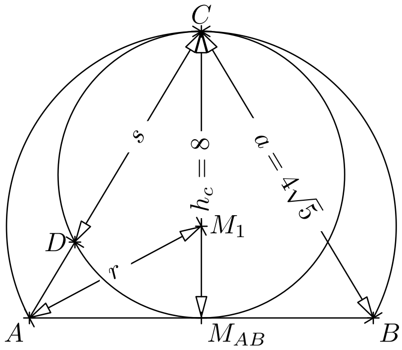
    Hinweise: Fertigen Sie eine Skizze an. Erdradius: 6370 km

Aufgabe 8.8

a) Berechnen Sie aus a und b die Längen der Strecken $\overline{AB}$, $\overline{MB}$ und $\overline{CB}$.



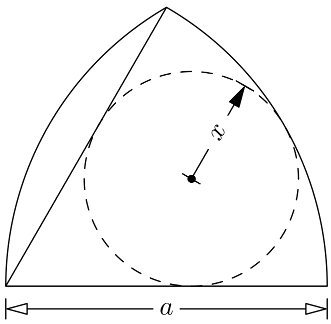
b) Berechnen Sie s und r aus $a = 4\sqrt{5}$ und $h_c = 8$.



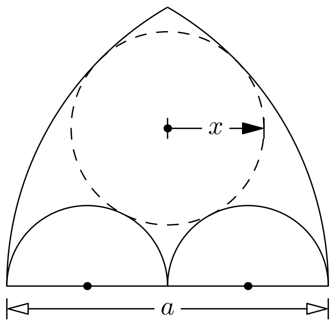
Aufgabe 8.9

Berechnen Sie aus a den Radius x der skizzierten Füllkreise.

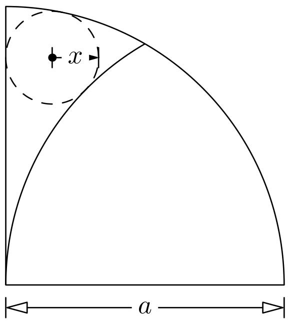
a)



b)



c)



Hinweis zu a): Suchen Sie das 30°-60° Dreieck.

Hinweis zu b) und c): Berechnen Sie den Abstand vom Kreiszentrum zur Grundlinie auf zwei Arten.

8.5 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: “If you want to nail it, you’ll need it”.

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe 8.1 ex-bruch-verbrechen

a) Falsch. Richtig: $2 \cdot \frac{ab}{a^2-b^2} = \frac{2}{1}\frac{ab}{a^2-b^2} = \frac{2ab}{a^2-b^2}$.

b) Richtig, aber unnötig kompliziert. $\frac{b}{a+b} \cdot \frac{a}{a-b} = \frac{b(a-b)}{a^2-b^2} \cdot \frac{a(a+b)}{a^2-b^2}$ Erweitern ist unnötig beim Multiplizieren (nur zum Addieren muss erst gleichnamig gemacht werden). Es kann nachher wieder gekürzt werden. $\frac{b}{a+b} \cdot \frac{a}{a-b} = \frac{ab}{a^2-b^2}$

c) Falsch. Richtig wäre $\frac{b(a-b)}{a^2-b^2} \cdot \frac{a(a+b)}{a^2-b^2} = \frac{b(a-b)\cdot a(a+b)}{(a^2-b^2)^2}$

d) Falsch. Schutzklammer setzen: $\frac{a^2+ab}{a^2-b^2} - \frac{ab-b^2}{a^2-b^2} = \frac{a^2+ab-\left(ab-b^2\right)}{a^2-b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

e) Falsch. Gekürzt werden kann nur aus Produkten von Brüchen.

f) Falsch. Schutzklammer setzen: $\frac{1}{a^2-ab} - \frac{b^2-ab}{1} = \frac{1}{a^2-ab} - (b^2-ab) = \frac{1}{a^2-ab} - b^2 + ab$

g) Falsch. Punkt vor Strich! (Und es wurde unnötigerweise für eine Multiplikation erweitert). $\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2} + \frac{(a-b)^2}{a^2-b^2} - \left(\frac{2(a^2-b^2)}{a^2-b^2} \cdot \frac{a^2}{a^2-b^2}\right) = \cancel{\frac{(a+b)^2+(a-b)^2-2(a^2-b^2)}{a^2-b^2}} \cdot \frac{a^2}{a^2-b^2}$

h) Falsch. a kann nicht ausgeklammert werden (und dann auch nicht gekürzt werden).

i) Falsch: Aus Differenzen und Summen…

j) Falsch. Auch x muss mit 6 multipliziert werden. Die Operationen werden immer auf die **gesamte** linke und rechte Seite angewandt.

$$\begin{aligned} \frac{4x-5}{6} &= x + \frac{5}{6} && \mid \cdot 6 \\ 4x-5 &= 6x+5 \end{aligned}$$

k) Falsch. Die neue Gleichung hat zwar die gleichen Lösungen, es wurde aber nicht $4x$ sondern $\frac{4x}{6}$ subtrahiert. Richtig:

$$\begin{aligned} \frac{4x+7}{6} &= \frac{4+5x}{6} && \mid -\frac{4x}{6} - \frac{4}{6} \\ \frac{3}{6} &= \frac{x}{6} \end{aligned}$$

l) Wenn $ab < 0$, muss eine Zahl positiv und die andere negativ sein. D.h. Entweder ($a < 0$ und $b > 0$) oder ($a > 0$ und $b < 0$).

m) Nichts, jede Kombination ist möglich (man nehme z.B. alle möglichen Zweier-Kombinationen von $+1$ und -1).

Lösung zu Aufgabe 8.2 ex-pythagoras-beweise

a) Mit den Katheten a, b und der Hypotenuse c kann man die Gesamtfläche auf 2 Arten berechnen und die entstehende Gleichung vereinfachen:

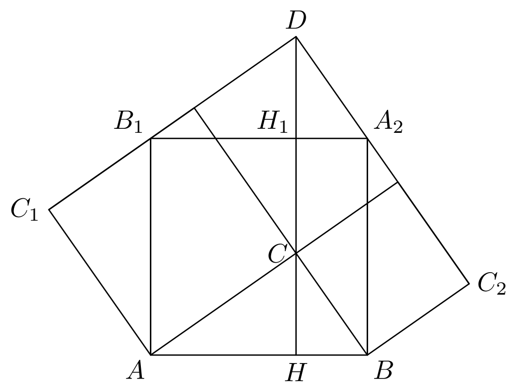
$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= c^2 + 4\cdot\left(\frac{1}{2}ab\right) \\ a^2+2ab+b^2 &= c^2+2ab \qquad \mid -2ab \\ a^2+b^2 &= c^2\end{aligned}$$

was zu beweisen war.

b) Mit den Katheten a, b und der Hypotenuse c kann man die Gesamtfläche auf 2 Arten berechnen und die entstehende Gleichung vereinfachen:

$$\begin{aligned}c^2 &= (a-b)^2 + 4\cdot\left(\frac{1}{2}ab\right) \\ c^2 &= a^2-2ab+b^2+2ab \\ c^2 &= a^2+b^2\end{aligned}$$

was zu beweisen war.



c) Zuerst ist zu bemerken, dass die Dreiecke $\triangle AB_1C_1$ und $\triangle A_2BC_2$ deckungsgleich sind mit $\triangle ABC$ und durch Drehungen um 90° erhalten wurden (gleiche Winkel, gemeinsame Seite b, bzw. a).
Damit gilt, dass die Strecken $[AB_1]$ und $[BA_2]$ und $[CD]$ alle die gleiche Länge c haben.
Das Parallelogramm $ACDB_1$ hat die gleiche Grundlinie und Höhe wie das Quadrat über der Seite $b = [AC]$ und hat somit die Fläche b^2. Dieses Parallelogramm hat die gleiche Fläche wie das Rechteck AHH_1B_1.
Das Parallelogramm BA_2DC hat die gleiche Grundlinie und Höhe wie das Quadrat über der Seite $a = [AC]$ und hat somit die Fläche a^2. Dieses Parallelogramm hat die gleiche Fläche wie das Rechteck HBA_2H_1.
Das Quadrat ABA_2B_1 hat die Fläche c^2 und ist gleich der Summe der Flächen der Rechtecke AHH_1B_1 und HBA_2H_1, also $b^2 + a^2$, was zu beweisen war.

Lösung zu Aufgabe 8.3 ex-umkehrformeln

a) $\boxed{c=\sqrt{a^2+b^2}}$. Die doppelte Dreiecksfläche ist $ab = ch$ und daraus $h = \frac{ab}{c}$, eingesetzt für c: $\boxed{h=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}$.
Kathetensatz: $cp = a^2$ also $p = \frac{a^2}{c}$, eingesetzt für c: $\boxed{p=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}}$. Entsprechend $\boxed{q=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}}$.

b) $\boxed{h=\sqrt{a^2-p^2}}$, Kathetensatz $cp = a^2$ also $\boxed{c=\frac{a^2}{p}}$. Aus $p+q = c$ ergibt sich $q = c-p$, also $\boxed{q=\frac{a^2}{p}-p}$.
Für b bieten sich jetzt viele Wege an, z.B. $b=\sqrt{c^2-a^2}$, eingesetzt für c: $\boxed{b=\sqrt{\frac{a^4}{p^2}-a^2}}$. Hinweis: Die letzte Formel lässt sich zu $b = a\frac{h}{p}$ vereinfachen.

c) $\boxed{h=\sqrt{pq}}$. $\boxed{c=p+q}$. $a=\sqrt{h^2+p^2}$, eingesetzt für h: $\boxed{a=\sqrt{pq+p^2}}$, entsprechend $\boxed{b=\sqrt{pq+q^2}}$.

d) $\boxed{q=c-p}$. Aus dem Höhensatz ergibt sich $\boxed{h=\sqrt{p(c-p)}}$, aus dem Kathetensatz $\boxed{a=\sqrt{cp}}$ und $\boxed{b=\sqrt{c(c-p)}}$

Lösung zu Aufgabe 8.4 ex-flaechenverwandlung

a) $h^2 = pq$. Die Rechtecksseiten entsprechen p und q. Damit kann die Seite $c = p + q$ hingelegt werden (Punkte A, B). Die Höhe als 1.g.O.f.C kann eingezeichnet werden. Der Thaleskreis über $[AB]$ ist der 2.g.O.f.C. Das Quadrat über h ist nun flächengleich.

b) $a^2 = cp$. Die längere Rechtecksseite entspricht c, die kürzere p. Damit kann die Seite c (Punkte A, B) und die Höhe h auf c (1.g.O.f.C) eingezeichnet werden. Der Thaleskreis über $[AB]$ ist der 2.g.O.f.C. Das Quadrat über a ist nun flächengleich.

c) $h^2 = pq$. Eine Quadratseite entspricht h (Punkt C und Höhenfusspunkt H), der Hypotenusenabschnitt p entspricht der Rechtecksseite x. Damit kann B konstruiert werden und die Seite b rechtwinklig zu a in C abgetragen werden, ergibt A und den gesuchten Hypotenusenabschnitt $q = [AH]$.

d) Je nachdem, ob $x < s$ oder $x > s$ ergibt sich eine andere Konstruktion.
Fall 1: $x > s$. Kathetensatz: $a^2 = cp$. Die Seite $c = x$. Eine Quadratseite entspricht der Seite a (Punkte B und C). Die Seite b kann also hingelegt werden (1.g.O.f.A). Der Kreis $k(B, s)$ ist der 2.g.O.f.A. Der Höhenfusspunkt auf c kann nun konstruiert und der gesuchte Hypotenusenabschnitt p abgelesen werden.
Fall 2: $x < s$. Kathetensatz: $a^2 = cp$. In diesem Fall $p = x$. Das Dreieck $\triangle BCH$ kann konstruiert werden (Thaleskreis über $[BC]$ geschnitten mit $k(B, x)$ ergibt H. Das Dreieck ABC kann nun ergänzt und die gesuchte Seite c kann abgelesen werden.

Lösung zu Aufgabe 8.5 ex-rechtwinklig-gleischschenkliges-dreieck

a) $c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, also $c = \sqrt{2}a$.

b) Aus $c = \sqrt{2}a$ erhält man $a = \frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{c\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot c$.

Lösung zu Aufgabe 8.6 ex-30-60-90-dreieck

Erst ist zu bemerken, dass das 30°, 60°, 90° Dreieck ein halbes gleichseitiges Dreieck ist, d.h. $a = \frac{1}{2}c$.

$\boxed{a \text{ gegeben}}$: $c = 2a$ und $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3} \cdot a$.

$\boxed{b \text{ gegeben}}$: Aus $b = \sqrt{3}a$ erhält man $a = \frac{b}{\sqrt{3}} = \frac{b\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot b$.

Und aus $c = 2a$ folgt $c = \frac{2\sqrt{3}}{3}b$.

$\boxed{c \text{ gegeben}}$: $a = \frac{1}{2}c$ und (aus Teilaufgabe a)) $b = \sqrt{3}a = \frac{\sqrt{3}}{2}c$. (Oder etwas komplizierter, via Satz von Pythagoras: $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{c^2 - \frac{c^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}c^2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}c = \frac{\sqrt{3}}{2}c$.)

Lösung zu Aufgabe 8.7 ex-pythagoras-angelikas-sammlung

1. a) Katheten mit Länge 3 und 5, dann ist das Hypotenusenquadrat die Lösung
   b) Kathete mit Länge 3, Hypotenuse mit Länge 5, dann ist das andere Kathetenquadrat die Lösung
2. Flächenverwandlung Rechteck → Quadrat (z.B. mit Hilfe des Höhensatzes, wobei ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenusenabschnitt 3 und a) $\frac{3}{2}$, b) 6 und c) 9 zu konstruieren ist. Die Höhe ist dann die gesuchte Quadratseite).
3. a) z.B. $5 = 1^2 + 2^2$ oder $5 = 3^2 - 2^2$ oder $5 = 1 \cdot 5$. b) $27 = 6^2 - 3^2$ oder $5^2 + 1^2 + 1^2$ oder $27 = 3 \cdot 9$.
4. 13.9 cm (Halbe Diagonale im Rechteck, zu berechnen mit dem Satz von Pythagoras).
5. 35.7 km. Sei M der Erdmittelpunkt, L die Spitze des Leuchtturms, T der Berührungspunkt der Tangente durch L an $k(M, r_e)$. Im $\triangle MLT$ gilt: $\overline{LT}^2 = \overline{ML}^2 - \overline{MT}^2 = (r_e + l)^2 - r_e^2$.
6. Alle Angaben in km. Erdradius $r = 6370$, Distanz $d = 12.2$. Die gesuchte Tiefe ist $r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} \approx 0.0029207$. Also knapp 3m.
7. maximal 2.32 m. Entscheidend ist die Rechtecksdiagonale bei Schrank. Diese darf höchstens gleich lang wie der Raum hoch sein.

8. $s_a = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2} = \sqrt{109} = 10.44$, $s_b = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}} = \sqrt{61} = 7.81$. Die Schwerlinien sind Hypotenusen in rechtwinkligen Dreiecken!
$s_c = \frac{c}{2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} = \frac{\sqrt{136}}{2} = 5.83$ C liegt auf dem Thaleskreis und damit ist s_c ein Radius. Das gilt natürlich nur im rechtwinkligen Dreieck!
9. $a = 39$ $b = 25$. Seien H der Höhenfusspunkt und M_c die Seitenmitte von c. HM_c ist Kathete im $\triangle HM_cC$. $\overline{HM_c} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$. Damit ist $\overline{HA} = \frac{c}{2} - \overline{HM_c} = 28 - 8 = 20$. b ist Hypotenuse im $\triangle AHC$. $b = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$. a ist Hypotenuse im $\triangle HBC$. $a = \sqrt{15^2 + 36^2} = 39$.
10. a) z.B. $61 = 6^2 + 5^2$ b) z.B. $153 = 12^2 + 3^2$ c) $7 = 4^2 - 3^2$
11. Die Distanz zweier Punkte kann mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnet werden. Z.B. ist die Strecke $[AB]$ die Hypotenuse und die Katheten sind parallel zu den Achsen. Deren Länge entspricht dann genau der Differenz der jeweiligen Koordinaten. Berechnet man diese Längen, stellt man fest, dass die Summe der Quadrate von zweien die dritte ergeben und damit ist das Dreieck rechtwinklig.
12. rechtwinklig, Fläche 20.
13. Dreieck in ein flächengleiches Rechteck umwandeln. Dann Höhen- oder Kathetensatz anwenden.
14. Höhen- oder Kathetensatz anwenden
15. a) 17.85 km (Lösung analog zu Aufgabe 5). b) 37.39 km (Lösung ganz ähnlich zu Aufgabe 6).

Lösung zu Aufgabe 8.8 ex-satzgruppe-pythagoras-figuren

a) Der Kreisbogen ist ein Thaleskreis über $[PR]$, damit ist $\triangle PRB$ rechtwinklig. Damit gilt der Höhensatz und so ist $\overline{AB} = \sqrt{ab}$.
$\overline{MB} = \overline{MR} = \frac{a+b}{2}$ (Kreisradien).
Der Kathetensatz im $\triangle MAB$ besagt: $\overline{MB} \cdot \overline{CB} = \overline{AB}^2$ und damit $\overline{CB} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{MB}} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b}$

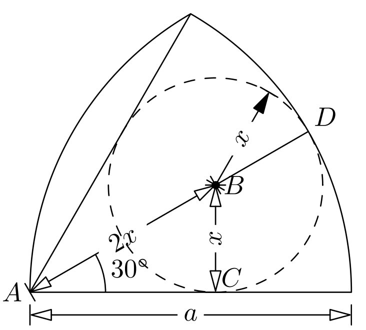
b) Im $\triangle M_{AB}BC$ gilt: $\overline{M_{AB}B} = \sqrt{a^2 - h_c^2} = \sqrt{80 - 64} = \sqrt{16} = 4$.
Im $\triangle M_{AB}M_1A$ gilt: $r^2 = \overline{M_{AB}A}^2 + (h_c - r)^2$. Eingesetzt:

$$\begin{aligned}
r^2 &= 4^2 + (8-r)^2 & \\
r^2 &= 16 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot r + r^2 & &| - r^2 \\
0 &= 80 - 16r & &| + 16r \\
16r &= 80 & &| : 16 \\
r &= 5 & &
\end{aligned}$$

Der Punkt D liegt auf dem Thaleskreis über $M_{AB}C$ und damit ist $[M_{AB}D]$ die Höhe im rechtwinkligen $\triangle AM_{AB}C$. Der Kathetensatz besagt: $a \cdot s = h_c^2$ und damit ist $s = \frac{h_c^2}{a} = \frac{64}{4\sqrt{5}} = \frac{16}{\sqrt{5}} = \frac{16\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{16\sqrt{5}}{5}$

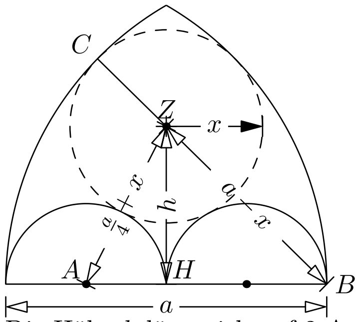
Lösung zu Aufgabe 8.9 ex-pythagoras-fuellkreise

a)



$\triangle ABC$ ist ein 30°-60° Dreieck und damit ist $\overline{AB} = 2\overline{CB}$. Weiter ist $\overline{AD} = a = 3x$ und damit ist $x = \frac{1}{3}a$.

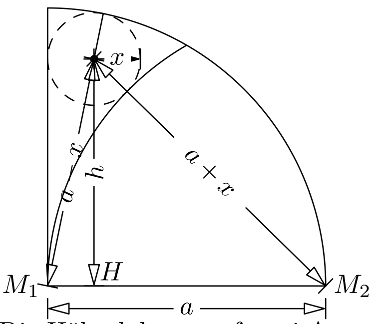
b)



Die Höhe h lässt sich auf 2 Arten berechnen, einmal im $\triangle AHZ$ und einmal im $\triangle HBZ$.

$$\begin{aligned}
h^2 &= h^2 \\
\left(x+\frac{a}{4}\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2 &= (a-x)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\
x^2 + 2x\frac{a}{4} + \frac{a^2}{16} - \frac{a^2}{16} &= a^2 - 2ax + x^2 - \frac{a^2}{4} && \mid -x^2 \\
\frac{ax}{2} &= \frac{3a^2}{4} - 2ax && \mid + \frac{4ax}{2} \\
\frac{5ax}{2} &= \frac{3a^2}{4} && \mid \cdot \frac{2}{5a} \\
x &= \frac{3a}{10}
\end{aligned}$$

c)



Die Höhe h kann auf zwei Arten berechnet werden, einmal im $\triangle M_1HZ$ und einmal im $\triangle HM_2Z$:

$$\begin{aligned}
h^2 &= h^2 \\
(a-x)^2 - x^2 &= (a+x)^2 - (a-x)^2 \\
a^2 - 2ax &= 4ax && \mid +2ax \\
a^2 &= 6ax && \mid : 6a \\
\frac{a}{6} &= x
\end{aligned}$$

Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

10 Funktionen

Eine Funktion kann intuitiv als eine Art «Maschine» aufgefasst werden, die aus einem «Input» einen «Output» generiert. Z. B. ist die Maschine, die eine Zahl als Input entgegennimmt, daraus die Wurzel zieht, davon die Gegenzahl nimmt und das Ergebnis dieser Berechnungen als Output liefert, eine Funktion.

$$\xrightarrow{\text{Input}} \boxed{\text{Maschine}} \xrightarrow{\text{Output}}$$

Unsere Beispielfunktion liefert beim Input 7 als Output $-\sqrt{7}$.

Der «Input» wird **Argument** genannt, der «Output» **Wert**.

Die **Definitionsmenge** besteht aus allen erlaubten Argumenten, gibt also an, was als Argument («Input») überhaupt zulässig ist. Im Beispiel sind als Argumente alle positiven reellen Zahlen und Null erlaubt; die maximal mögliche Definitionsmenge besteht also aus allen positiven reellen Zahlen und der Null. Die Definitionsmenge kann aber auch kleiner sein als maximal möglich (im Beispiel könnte man auch $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ als Definitionsmenge nehmen).

Die **Wertemenge** besteht mindestens aus allen möglichen Werten («Outputs»), die produziert werden können. In unserem Beispiel kommen alle negativen reellen Zahlen und die Null als Werte vor, die Wertemenge besteht also mindestens aus diesen Zahlen. Der Wertebereich kann aber auch grösser angegeben werden als minimal möglich (hier z. B. $\mathbb{R}$).

Statt Definitionsmenge sagt man auch *Definitonsbereich*, statt Wertemenge *Wertebereich*.

Definition 10.1 Funktion

Eine **Funktion** ist eine Vorschrift, die jedem Element einer Definitionsmenge **genau ein** Element einer Wertemenge zuordnet.

Funktion oder nicht?

- Jedem Schuhmodell eines Versandhauses wird der entsprechende Preis zugeordnet.
- Jeder Schülerin wird eine Zeugnisnote in Mathematik zugeordnet.
- Jeder Zeugnisnote werden die Schüler einer Klasse zugeordnet.
- Jeder natürlichen Zahl wird ihre Quadratzahl zugeordnet.
- Jedem Zeitpunkt wird die Position eines Smartphones zugeordnet.
- Jeder Position eines Smartphones werden die entsprechenden Zeitpunkte zugeordnet.

In der Mathematik interessieren wir uns in erster Linie für Funktionen, die Zahlen wieder Zahlen zuordnen; dabei betrachten wir fast immer Funktionen, die durch eine Formel beschrieben werden können.

10.1 Notation Zahlenmengen

Die folgenden Schreibweisen sind beispielsweise nützlich zur Angabe von Definitions- und Wertemengen.

$\mathbb{R}^*$	(die Menge) alle(r) reellen Zahlen ausser der Null:	$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$
$\mathbb{R}^+$	(die Menge) alle(r) positiven reellen Zahlen:	$\mathbb{R}^+ =]0, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
$\mathbb{R}_0^+$	(die Menge) alle(r) positiven reellen Zahlen und der Null:	$\mathbb{R}_0^+ = [0, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
$\mathbb{R}^-$	(die Menge) alle(r) negativen reellen Zahlen:	$\mathbb{R}^- =]-\infty, 0[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$
$\mathbb{R}_0^-$	(die Menge) alle(r) negativen reellen Zahlen und der Null:	$\mathbb{R}^- =]-\infty, 0] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$

In derselben Weise definiert man die Mengen $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Q}_0^+$, $\mathbb{Q}^-$, $\mathbb{Q}_0^-$ und analog für $\mathbb{Z}$. Bei den natürlichen Zahlen verwendet man eigentlich nur die Notation $\mathbb{N}^+$.

Aufgabe 10.1 Wahr oder falsch? Falls die Aussage falsch ist, korrigieren Sie diese mit möglichst kleinen Änderungen.

a) $\mathbb{N}^+ = \mathbb{Z}^+$ b) $\mathbb{R}^- = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+$ c) $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-$
d) $\mathbb{Q}^+ \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$ e) $\mathbb{R}_0^- \cap \mathbb{Q}_0^+ = \{0\}$ f) $\mathbb{R}_0^+ \cup \mathbb{Z}^- = \mathbb{Q}$

10.2 Notation von Funktionen

In ausführlicher Weise wird eine Funktion f wie folgt notiert:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{D} & \to & \mathbb{W} \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

wobei gelten:

- f ist der **Name der Funktion** (normalerweise ein beliebiger Kleinbuchstabe)
- $\mathbb{D}$ ist die Definitionsmenge (meist maximal gross)
- $\mathbb{W}$ ist die Wertemenge (oft minimal klein)
- x ist das **Argument**, wobei x aus $\mathbb{D}$ kommt. Die Wahl des Buchstabens ist beliebig (er darf aber noch nicht anderweitig verwendet sein).
- $f(x)$ ist der **Wert** von f an der **Stelle** x. Dabei muss $f(x)$ ein Element von $\mathbb{W}$ sein (für jedes Argument $x \in \mathbb{D}$).
  Statt $f(x)$ steht dort meist eine Formel, die angibt, wie $f(x)$ aus x berechnet wird, vgl. die nachfolgenden Beispiele.

Sprechweise für obige Notation:

- Sprich: «f von $\mathbb{D}$ nach $\mathbb{W}$» für $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{W}$.
- Sprich: «x wird abgebildet auf f von x» für $x \mapsto f(x)$:

Beispiele:

$$\begin{array}{rccc} a: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x+5 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} m: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & r & \mapsto & 3r \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} s: & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}^* \\ & t & \mapsto & \frac{1}{t} \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} q: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_0^+ \\ & v & \mapsto & v^2 \end{array}$$

Diese Funktionen können auch abgekürzt wie folgt geschrieben werden:

$$a(x) = x+5 \qquad m(r) = 3r \qquad s(t) = \frac{1}{t} \qquad q(v) = v^2$$

Dabei wird jeweils die grösstmögliche Definitionsmenge angenommen (falls möglich $\mathbb{R}$) und die kleinstmögliche Wertemenge, d. h. $\mathbb{W} = \{f(x) \mid x \in \mathbb{D}\}$.
Die Funktion a ist die «Maschine», die eine Zahl als Argument («Input») bekommt, 5 dazu zählt und dieses Resultat als Wert («Output») produziert. Entsprechend multipliziert m mit 3, s bildet den Kehrwert und q quadriert.
Berechnen Sie:

a) $a(2) =$ b) $m(7) =$ c) $s(5) =$ d) $q(-1) =$
e) $a\left(\frac{2}{3}\right) =$ f) $m\left(-\frac{3}{4}\right) =$ g) $s\left(\sqrt{2}\right) =$ h) $a(x-2) =$
i) $m(u+v) =$ j) $q(c+d) =$ k) $a(m(4)) =$ l) $m(a(4)) =$
m) $q(m(s(-0.5))) =$ n) $a(s(q(\sqrt{7}))) =$

10.3 Spezielle Funktionen

In der Mathematik gibt es viele wichtige Funktionen. Einige davon kennen Sie bereits.

10.3.1 Wurzel- und Betragsfunktion

Die **Wurzelfunktion** $\sqrt{\cdot}$ ordnet jedem **nicht-negativen** reellen Argument x diejenige **nicht-negative** reelle Zahl $\sqrt{x}$ zu, die quadriert das Argument x ergibt:

$$\begin{array}{cccc} \sqrt{\cdot}: & \mathbb{R}_0^+ & \to & \mathbb{R}_0^+ \\ & x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

Beachten Sie: Für negative Zahlen ist die Wurzelfunktion nicht definiert. Die Wurzelfunktion liefert *stets* **positive** Zahlen (oder Null).

Die Gleichung $x^2 = 2$ hat **zwei Lösungen**, nämlich $+1.41421\ldots$ und $-1.41421\ldots$. Die Wurzelfunktion liefert, wie alle Funktionen, jedoch für jedes Argument **genau einen** Wert; es gilt $\sqrt{2} = +1.41421\ldots$.

Die **Betragsfunktion** $|\cdot|$ kann wie folgt definiert werden:

$$\begin{array}{cccc} |\cdot|: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_0^+ \\ & x & \mapsto & |x| = \begin{cases} x & \text{wenn } x \geq 0 \\ -x & \text{sonst} \end{cases} \end{array}$$

Überprüfen Sie die Definition, indem Sie positive und negative Zahlen für x einsetzen.

Aufgabe 10.2 Erklären Sie, warum $|x| = \sqrt{x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

10.4 Nutzen von Funktionen

Mit Funktionen können z. B. physikalische Abläufe beschrieben werden, wie etwa die z-Koordinate (Höhe in m nach oben gemessen) und Geschwindigkeit v (in m/s) eines Massepunktes (beliebiger Masse) im freien Fall bei Vernachlässigung der Luftreibung. Das Argument t ist die Zeit (in Sekunden):

$$z(t) = \frac{1}{2}gt^2 \qquad\qquad v(t) = gt$$

wobei $g = -9.81$ die Erdbeschleunigung in $\mathrm{m/s^2}$ ist.

Aufgabe 10.3 Berechnen Sie mit Hilfe der obigen Funktionen z und v die Fallstrecke und die Geschwindigkeit nach 1 bzw. nach 2 bzw. nach 3 Sekunden Fallzeit.

10.5 Graph einer Funktion

Aufgabe 10.4

a) Zeichnen Sie ein Koordinatensystem mit einer horizontalen t-Achse (Beschriftung t statt x) und einer vertikalen s-Achse (Beschriftung s statt y). Zum Zeitpunkt Null fährt die Trogenerbahn am Bahnhof St. Gallen ab. Zeichnen Sie, möglichst realistisch, zu jedem Zeitpunkt t die zurückgelegte Strecke $s(t)$ ein (bis zur Haltestelle Spisertor).

b) Zeichnen Sie ins gleiche Koordinatensystem mit einer vertikalen v- statt s-Achse die entsprechende Geschwindigkeit ein.

Sie haben die Graphen der Funktionen s und v gezeichnet. Beachten Sie, dass diese Funktionen nicht vernünftig mit Formeln dargestellt werden können. Beachten Sie, dass $v(t)$ angibt, wie steil der Graph von s zu einem Zeitpunkt t ist.

Definition 10.2 Graph

Der **Graph einer Funktion** f ist die Menge aller Punkte $(x, f(x))$ mit $x \in \mathbb{D}$.

Aufgabe 10.5 Zeichnen Sie jeweils den Graph der angegebenen Funktion in ein Koordinatensystem ein. Bestimmen Sie vorgängig Definitions- und Wertebereich, um nur den benötigten Teil des Koordinatensystems zeichnen zu müssen.

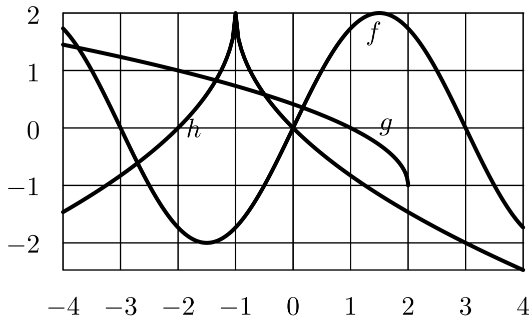
a) $a(r) = \sqrt{r}$ b) $b(q) = q^2$ c) $c(s) = |s|$

d) $d(t) = t$ e) $e(u) = -u$ f) $f(v) = \frac{1}{2}v - 1$

g) $g(w) = \sqrt{9 - w^2}$ h) $h(y) = \sqrt{-y}$ i) $i(x) = -|x - 1| + 1$

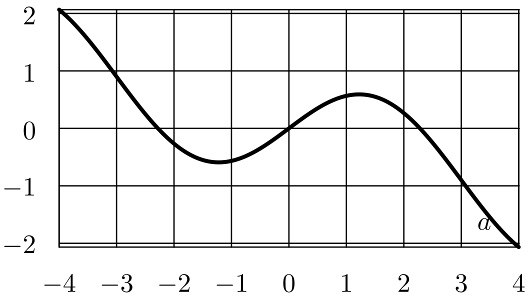
Um eine vernünftige Vorstellung vom Aussehen des Graphen zu bekommen, muss bei solchen (durch Formeln gegebenen) Funktionen nicht für alle Argumente der Wert der Funktion berechnet werden; selbst ein Computer wäre damit überfordert. Die Art der Formel lässt auf die Art der Kurve schliessen. Mehr dazu später.

Aufgabe 10.6
Für ganzzahlige Argumente lesen Sie die Funktionswerte der Funktionen f, g, und h aus deren Graphen ab.
Hinweis: Formeln für die Funktionen sind hier nicht gefragt!

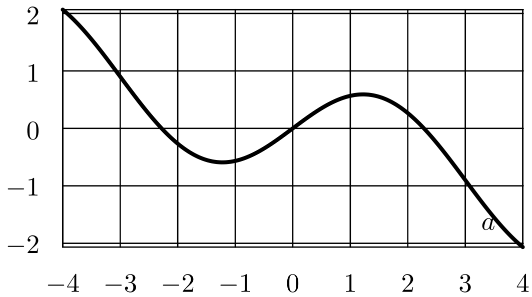


Aufgabe 10.7 Gegeben ist eine Funktion a, deren Graph in jedem der drei folgenden Koordinatensysteme eingezeichnet ist. Zeichnen Sie jeweils den Graph der angegebenen Funktion ein.

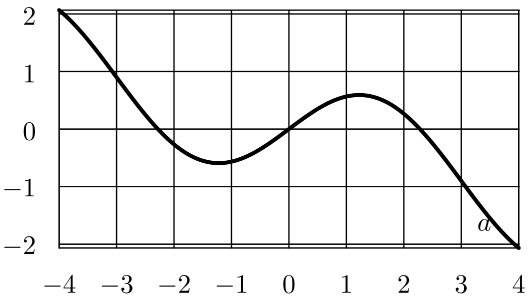
a) $f(x) = a(x) + 1$



b) $g(x) = \frac{1}{2}a(x)$



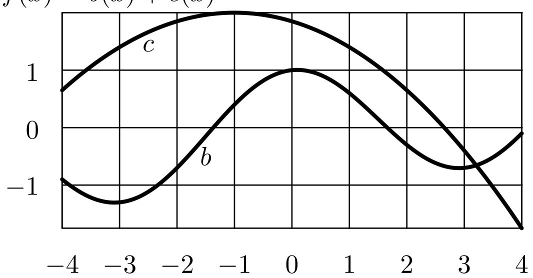
c) $h(x) = -a(x)$



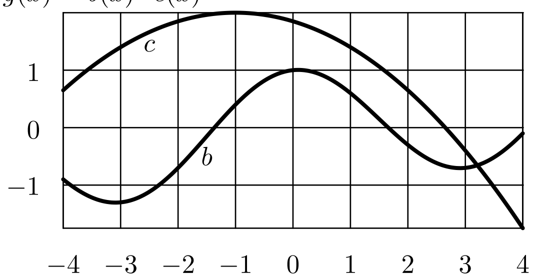
Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

Aufgabe 10.8
Die Graphen zweier Funktionen b und c sind in den folgenden Koordinatensystemen eingezeichnet. Ergänzen Sie jeweils den Graph der angegebenen Funktion.

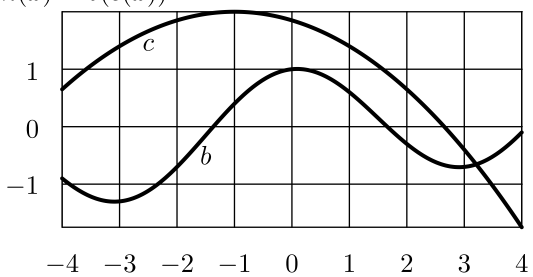
a) $f(x) = b(x) + c(x)$



b) $g(x) = b(x) \cdot c(x)$



c) $h(x) = b(c(x))$



10.6 Transformation von Funktionsgraphen

Aufgabe 10.9 Gegeben sei eine Funktion z. Beschreiben Sie die geometrische Abbildung, um aus dem Funktionsgraph von z den Funktionsgraphen folgender Funktionen zu erhalten:

a) $a(x) = z(x) + 2$
b) $b(x) = z(x) - 1$
c) $c(x) = z(x) + v$, wobei $v \in \mathbb{R}$ fest vorgegeben ist
d) $d(x) = 2 \cdot z(x)$
e) $e(x) = \frac{1}{2} \cdot z(x)$
f) $f(x) = -z(x)$
g) $g(x) = -2 \cdot z(x)$

Merke

Wird zur **gesamten Funktion** eine positive Zahl addiert (bzw. von ihr subtrahiert), verschiebt sich der Graph entsprechend vertikal nach oben (bzw. unten).

Merke

Wird die **gesamte Funktion** mit einer Zahl multipliziert, wird der Graph in y-Richtung entsprechend gestreckt (und zusätzlich gespiegelt, wenn die Zahl negativ ist).

10.7 Lineare Funktionen

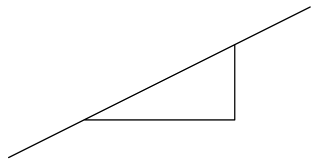
Aufgabe 10.10 Beschreiben Sie möglichst präzise den Graphen der Funktion $f(x) = x$. Finden Sie einleuchtende Argumente dafür, dass der Graph die Form hat, die er hat.

Aufgabe 10.11 Zeichnen Sie folgende Funktionsgraphen mit möglichst wenig Aufwand. Sie sollen dabei höchstens einen Punkt berechnen und/oder mit Transformationen des Graphen der Funktion $f(x) = x$ arbeiten.

a) $a(x) = 3x$
b) $b(x) = \frac{1}{3}x$
c) $c(x) = -x$
d) $d(x) = -\frac{1}{2}x$
e) $e(x) = x - 1$
f) $f(x) = -x + 1$
g) $g(x) = 2x - 2$
h) $h(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

 Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

Definition 10.3 Steigung



Die **Steigung einer Geraden** im Koordinatensystem ist die reelle Zahl, die angibt, um wieviele y-Einheiten die Gerade pro x-Einheit ansteigt. Konkret

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

wobei Δy für die Differenz zweier y-Werte und Δx für die Differenz entsprechender x-Werte steht. *Beachte: Differenzen sind vorzeichenbehaftet!*

Aufgabe 10.12 Zeichnen Sie in ein einziges Koordinatensystem elf Ursprungsgeraden (= Geraden durch den Ursprung) mit den Steigungen $\pm\frac{1}{4}$, $\pm\frac{1}{2}$, ± 1, ± 2, ± 4 und 0. Beschriften Sie die Geraden mit deren Steigungen.

Aufgabe 10.13 Gegeben sind zwei Punkte $A = (x_A, y_A)$ und $B = (x_B, y_B)$ mit unterschiedlichen x-Koordinaten. Berechnen Sie die Steigung der Geraden durch A und B.
Warum müssen die x-Koordinaten unterschiedlich sein?

Aufgabe 10.14 Bestimmen Sie jeweils die Steigung der Geraden, die mit der x-Achse einen Winkel von

a) $0°$ b) $30°$ c) $45°$ d) $60°$ e) $90°$

bildet.

Definition 10.4 Lineare Funktion

Eine **lineare Funktion** ist eine Funktion f, die in folgender Form geschrieben werden kann:

$$f(x) = mx + q$$

Dabei sind m und q geeignet gewählte reelle Zahlen.

Aufgabe 10.15

a) Begründen Sie, warum der Graph einer linearen Funktion eine Gerade ist.
b) Welcher Eigenschaft der Geraden entspricht m?
c) Wenn der Graph einer linearen Funktion gegeben ist, wo kann man q ablesen?
d) Schreibe möglichst wenig Text in die Box, damit die folgende falsche (warum?) Aussage korrekt wird!
Jede $\boxed{}$ Gerade im Koordinatensystem ist der Graph einer linearen Funktion.

Definition 10.5 Steigung und Achsenabschnitt

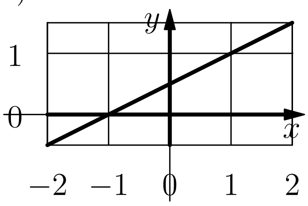
Bei einer linearen Funktion $f(x) = mx + q$ ist
m ✎ die Steigung und q ✎ der y-Achsenabschnitt.

Aufgabe 10.16 Finden Sie Beispiele aus dem Alltag für lineare Funktionen.

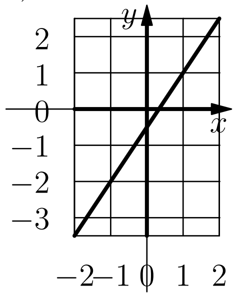
 Ivo Blöchliger, Olaf Schnürer

Aufgabe 10.17 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der folgenden linearen Funktionen:

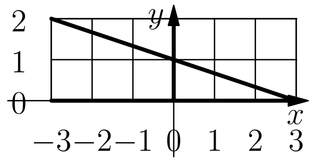
a)



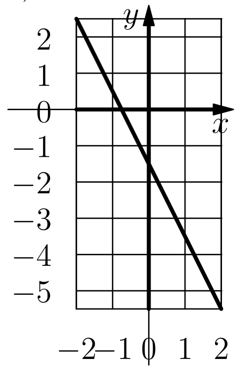
b)



c)



d)



Aufgabe 10.18 Indem Sie sich zuerst überlegen, wie der Funktionsgraph aussehen kann, bestimmen Sie alle linearen Funktionen,

a) die die Zahl 1 auf 3 und die Zahl 4 auf 2 abbilden.
b) die das Intervall $[-1, 1]$ vollständig auf das Intervall $[0, 4]$ abbilden.
c) die das Intervall $[0, 1]$ auf das Intervall $[1, 6]$ abbilden.
d) die das Intervall $[1, 6]$ auf das Intervall $[0, 1]$ abbilden.
e) die das Intervall $[0, 1]$ auf das Intervall $[a, b]$ abbilden (mit $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$).
f) die das Intervall $[a, b]$ auf das Intervall $[0, 1]$ abbilden (mit $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$).
g) die das Intervall $[a, b]$ auf das Intervall $[c, d]$ abbilden.

Aufgabe 10.19 Gegeben ist die lineare Funktion $f(x) = 2x - 1$.

a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f.
b) Zeichnen Sie die Senkrechte zum Graphen von f durch den Punkt $(-2, 2)$ und bestimmen Sie deren Funktionsgleichung in der Form $g(x) = mx + q$.
c) Wie gross ist die Steigung einer Senkrechten zu einer Geraden mit Steigung $m = \frac{4}{3}$?

Aufgabe 10.20 Gegeben ist eine Gerade g mit Steigung m. Berechnen Sie die Steigung $m_\perp$ einer Senkrechten zu g.

Aufgabe 10.21 Gegeben sind zwei lineare Funktionen $f(x) = -\frac{1}{3}x - 1$ und $g(x) = \frac{3}{2}x + 1$.

a) Zeichnen Sie die beiden Graphen von f und g in ein gemeinsames Koordinatensystem. **Einheitslänge: 6 Häuschen.**
b) Lesen Sie die ungefähren Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Geraden ab.
c) Berechnen Sie die exakten Koordinaten des Schnittpunktes.
Hinweis: Im Schnittpunkt sind die Funktionswerte beider Funktionen gleich.

Merke

Die Schnittpunkte der Graphen zweier Funktionen f und g erhält man, indem man die Gleichung

$$f(x) = g(x)$$

nach x (der x-Koordinate eines Schnittpunktes) auflöst. Sind f und g lineare Funktionen, ist die Gleichung selbst linear und kann einfach gelöst werden.

Aufgabe 10.22 Gegeben sind die Punkte $A = (-2, -1)$ und $B = (3, 1)$ sowie die Steigung $m = \frac{3}{2}$ der Geraden b durch den Punkt A. Gesucht sind die Koordinaten des Punktes C auf b, für den das Dreieck $\triangle ABC$ rechtwinklig ist.

a) Konstruieren Sie das Dreieck und lesen Sie die ungefähren Koordinaten von C ab.

b) Berechnen Sie die exakten Koordinaten von C.

Aufgabe 10.23 Gegeben sind zwei Punkte $A = (-3, 1)$ und $B = (2, -2)$. Finden Sie die Koordinaten der Punkte C und D oberhalb von AB, für die $ABCD$ ein Quadrat ist.

Aufgabe 10.24 Finden Sie ganzzahlige Koordinaten für die Eckpunkte eines rechtwinkligen Dreiecks so, dass die Hypotenuse parallel zur x-Achse ist und das Dreieck *nicht* gleichschenklig ist.

Bestimmen Sie dann die Koordinaten der Eckpunkte der Quadrate über den Dreiecksseiten.

Betrachten Sie das Quadrat über der Seite b. Das Quadrat soll kontinuierlich (als Animation) in ein Parallelogramm überführt werden, wobei die Seite b fix bleibt und die andere Seite am Schluss senkrecht auf der Hypotenuse steht (wie im dritten Beweis des Satzes von Pythagoras bzw. dem Beweis des Kathetensatzes, der Pythagoras sofort mitbeweist). Finden Sie zwei lineare Funktionen, die als Eingabe eine Zahl (alias Zeit) im Intervall $[0, 1]$ entgegennehmen und als Ausgabe die x- bzw. y-Koordinate eines „interessanten" Eckpunktes des Parallelogramms produzieren, d. h. für 0 das Quadrat und für 1 das Parallelogramm.

Hintergrund: In POV-Ray gibt es eine Variable `clock`*, die von 0 bis 1 läuft und das Erzeugen von Animationen erlaubt. Mit den obigen Funktionen kann diese Animation programmiert werden.*

10.8 Repetition

Funktion: Eine Funktion ordnet jedem Element einer Definitionsmenge $\mathbb{D}$ (meistens ist das Element eine reelle Zahle) ein Element einer Wertemenge $\mathbb{W}$ (meistens ist dieses Element wieder eine reelle Zahl) zu.

Diese Zuordnung kann auch als Maschine aufgefasst werden, die für jede Eingabe (Element aus der Definitionsmenge) eine Ausgabe (Element der Wertemenge) produziert.

Wir werden fast ausschliesslich Funktionen antreffen, die durch einfache Funktionsgleichungen (Formeln) dargestellt werden können. Die Funktionsgleichung gibt an, wie aus der Eingabe (meist durch die Variable x dargestellt) die Ausgabe berechnet werden kann.

Beispiele: $a(x) = 2x - 3$, $b(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $c(x) = |x + 2|$

Funktionsgraph: Sind Definitions- und Wertemenge Zahlen, kann der Funktionsgraph einer Funktion f im x/y-Koordinatensystem gezeichnet werden. Für jede mögliche Eingabe x wird der Punkt (x, y) gezeichnet, dessen y-Koordinate die Ausgabe der Funktion ist, also $y = f(x)$. Die Koordinaten der Punkte des Graphen sind also $(x, f(x))$ für alle möglichen Werte von x.

Transformation von Graphen: Wird zu einer Funktion eine konstante Zahl **addiert**, bzw. subtrahiert, **verschiebt** sich der Graph entsprechend in y-Richtung nach oben, bzw. nach unten.

Wird die gesamte Funktion mit einer konstanten Zahl **multipliziert**, wird der Graph in y-Richtung **gestreckt** oder gestaucht (und zusätzlich gespiegelt, wenn die Zahl negativ ist).

Lineare Funktion: Eine Funktion ist linear, wenn die Funktionsgleichung auf die Form $f(x) = m \cdot x + q$ gebracht werden kann. Der Graph einer linearen Funktion ist eine **Gerade**.

- Die Zahl m ist dann die **Steigung** und gibt an, um wieviele y-Einheiten die Gerade pro x-Einheit ansteigt (bei negativem m fällt die Gerade). Für zwei beliebige verschiedene Punkte auf der Geraden (und das zugehörige **Steigungsdreieck** darunter) gilt:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

wobei Δx bzw. Δy die vorzeichenbehafteten **Differenzen** der x- bzw. y-Koordinaten der beiden Punkte sind.

Die Steigung $m_\perp$ einer Geraden, die senkrecht auf einer Geraden mit Steigung m steht, ist

$$m_\perp = -\frac{1}{m}.$$

- Die Zahl q ist der **y-Achsenabschnitt** (= y-Koordinate des Schnittpunkts der Geraden mit der y-Achse). Beachte dazu: Wegen $f(0) = q$ ist $(0, q)$ ein Punkt der Geraden.

Schnittpunkte zweier Funktionsgraphen: Gegeben sind zwei Funktionen f und g. Ist x die x-Koordinate eines Schnittpunkts der Funktionsgraphen, so muss $f(x) = g(x)$ gelten. Gilt umgekehrt $f(x) = g(x)$ für ein Argument x, so ist der Punkt $(x, f(x)) = (x, g(x))$ ein Schnittpunkt der beiden Funktionsgraphen.

Die x-Koordinaten der Schnittpunkte erhält man somit durch Lösen der Gleichung

$$f(x) = g(x)$$

Die y-Koordinaten der Schnittpunkte erhält man durch Einsetzen der gefundenen x-Koordinaten in eine der beiden Funktionen.

10.8.1 Standardaufgaben

Aufgabe 10.25 Gegeben sind die Punkte $A = (-2, 1)$, $B = (1, -2)$ und $C = (3, 1)$.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen für die Geraden $a = BC$, $b = AC$ und $c = AB$.

b) Gilt $a \perp c$?

c) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Höhe h_a (dies ist die Gerade durch A, die senkrecht auf a steht).

d) Bestimmen Sie den Höhenfusspunkt H_a $(= a \cap h_a)$.

Aufgabe 10.26 Zeichnen Sie den Graphen folgender Funktionen in je ein Koordinatensystem. Bestimmen Sie vorgängig Definitions- und Wertebereich, um nur den benötigten Teil des Koordinatensystems zu zeichnen.

a) $a(r) = -\sqrt{r}$ b) $b(q) = \sqrt{-q}$ c) $c(s) = -|s|$

d) $d(t) = \frac{1}{2}t - 2$ e) $e(u) = \sqrt{|u|}$ f) $f(v) = |v| - 2$

g) $g(w) = w^2 - 2$ h) $h(y) = 2 - y^2$ i) $i(x) = |1 - |x||$

10.8.2 Vertiefungs- und Reflexionsaufgaben

Aufgabe 10.27 Von einer unbekannten Funktion f weiss man, dass $f(-1) = -1$, $f(0) = -2$ und $f(2) = 2$.

a) Auf wie viele Arten kann der Graph von f vervollständigt werden? Zeichnen Sie eine Variante.

b) Ausgehend von Ihrer Variante, zeichnen Sie die Graphen der Funktionen $g(x) = f(x)+2$, $h(x) = -f(x)$ und $k(x) = f(x + 2)$.

c*) Finden Sie eine mögliche Funktionsgleichung für f. Wer findet mehr als eine mögliche Formel?

Aufgabe 10.28 Gegeben sind die beiden linearen Funktionen $f(x) = 2x - 1$ und $g(x) = 2x + 1$.

a) Zeichnen Sie die Graphen der beiden Funktionen.

b) Messen Sie den Abstand der beiden Geraden (in Einheiten, nicht in cm!).

c) Berechnen Sie den exakten Abstand der beiden Geraden.

d*) Berechnen Sie den Abstand zweier Geraden mit Steigung m und Unterschied der Achsenabschnitte Δq.

Aufgabe 10.29 Wahr oder falsch? Begründen Sie und korrigieren Sie falls möglich falsche Aussagen in sinnvolle wahre Aussagen.

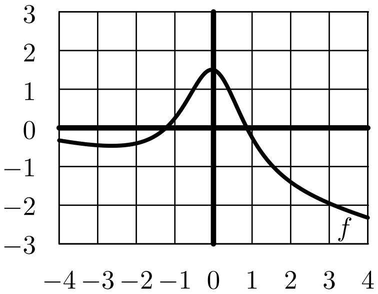
a) Für zwei beliebige Punkte in der x/y-Ebene gibt es immer eine lineare Funktion, deren Graph durch diese Punkte geht.
b) Haben zwei Geraden die gleiche Steigung, so sind sie parallel.
c) Haben zwei Geraden den gleichen y-Achsenabschnitt q, so schneiden sie sich auf der x-Achse.
d) Gegeben ist eine lineare Funktion $f(x) = mx+q$. Ersetzt man sowohl m als auch q durch ihre Gegenzahlen, wird der Graph an der y-Achse gespiegelt.
e) Die Steigung einer horizontalen Geraden ist nicht definiert.
f) Die Steigung der Winkelhalbierenden der Koordinatenachsen ist 1.
g) Die Steigung einer vertikalen Geraden ist 2.
h) Das Produkt der Steigungen zweier rechtwinkligen Geraden ist -1.
i) Erhöht man die Steigung einer Geraden um 2, so verschiebt sich die Gerade um 2 Einheiten in y-Richtung.
j) Wenn f eine lineare Funktion ist, dann ist auch $h(x) = 2 \cdot f(x)$ eine lineare Funktion.
k) Gegeben sind zwei lineare Funktionen f und g. Die Funktion $h(x) = f(x) + g(x)$ ist dann ebenfalls eine lineare Funktion.
l) Wenn f und g lineare Funktionen sind, dann ist auch $h(x) = f(g(x))$ eine lineare Funktion.
m) Wenn f eine lineare Funktion ist, dann ist auch $g(x) = f(x) \cdot f(x)$ eine lineare Funktion.
n) Die Graphen der Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = x+2$ schneiden sich in den Punkten $(-1, 1)$ und $(2, 4)$.
o) Die Graphen der Funktionen $f(x) = (x+1)^2 - 1$ und $g(x) = (x-1)^2 + 1$ schneiden sich in genau einem Punkt.
p) Die Graphen der Funktionen $f(x) = (x-1)^2 + 1$ und $g(x) = 1 - 2x$ schneiden sich in zwei Punkten.
q) Die Summe $h(x) = f(x) + g(x)$ zweier nicht-linearer Funktionen f und g ist nie linear.
r) Das Produkt $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ zweier linearer Funktionen f und g ist nie linear.
s) Der Abstand zweier Geraden ist gleich dem Unterschied der y-Achsenabschnitte.
t) Für beliebiges x liegt der Punkt $(f(x), x)$ auf dem Graphen der Funktion f.
u) Dr. Blöchligers Notenskala ist eine lineare Funktion der Punktzahl.
v) Die Zeit, die benötigt wird, um von einem Ort zu einem anderen zu gelangen, ist eine lineare Funktion der Entfernung der beiden Orte.

Aufgabe 10.30 Gegeben sind 4 Funktionen:
$f(x) = x^2 - 2x, \qquad g(x) = \sqrt{5-x}, \qquad h(x) = |x-2|, \qquad k(x) = \frac{3}{x}.$
Bestimmen Sie die (maximalen) Definitionsbereiche für diese Funktionen. Für g und h bestimmen Sie ebenfalls die Wertebereiche.
Berechnen Sie und vereinfachen Sie soweit wie möglich:

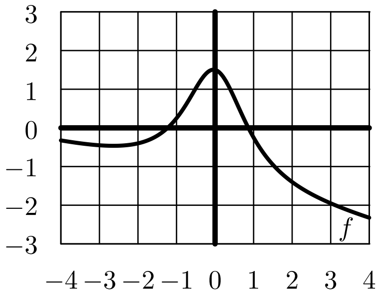
a) $f(7)$ b) $g(1)$ c) $h(-2)$ d) $k(-1)$
e) $h(f(1))$ f) $k(g(-31))$ g) $g(-h(f(-1)))$ h) $g(-(f(4)+h(4)))$
i) $k(a) \cdot f(a)$ j) $f(a+b) + k(\frac{1}{a+b}) + h(1)$
k) $f(a+1) \cdot k(a-1)$ l) $h(x^2+2)$

Aufgabe 10.31 Gegeben ist eine (bzw. sind zwei) Funktion(en) f (und g) durch ihre(n) Graphen. Skizzieren Sie jeweils den Graphen der angegebenen Funktion h:

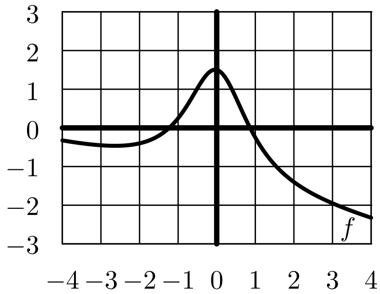
a) $h(x) = f(x) + \frac{3}{2}$



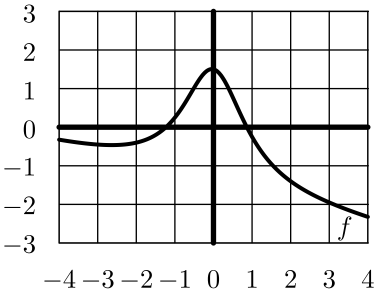
b) $h(x) = -2 \cdot f(x)$



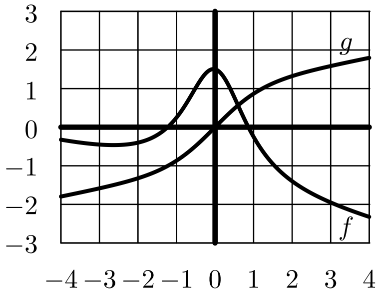
c) $h(x) = f(-x)$



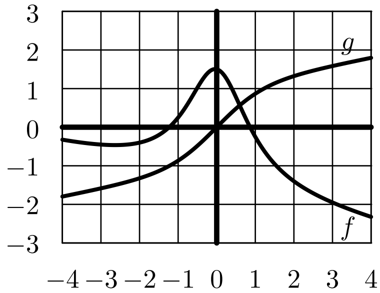
d) $h(x) = f(x-1)$



e) $h(x) = f(x) + g(x)$



f) $h(x) = f(x) \cdot g(x)$



Aufgabe 10.32 Gegeben sind die Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = 2x + q$, wobei q jeweils einen der drei Werte -2, -1 und 0 annehmen soll.

a) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f und g für die drei Werte von q. Wie viele Schnittpunkte erwarten Sie in den drei Fällen?

b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Taschenrechners die Schnittpunkte der Funktionsgraphen.

c*) Formen Sie die drei Schnittpunktsgleichungen so um, dass die Anzahl der Lösungen ersichtlich wird.

Aufgabe 10.33 Gegeben sind die zwei Funktionen $f(x) = \frac{3}{4}\sqrt{|x|}$ und $g(x) = \sqrt{1-x^2}$.

a) Was ist der (maximale) Definitions- und (minimale) Wertebereich der Funktion g?

b) Mit Hilfe des Taschnrechners, skizzieren Sie die Graphen der Funktionen $f(x)$, $g(x)$ und $-g(x)$ im gleichen Koordinatensystem. Wählen Sie als Einheitslänge mindestens 4cm (8 Häuschen).

c) Skizzieren Sie dann (zuerst von Hand) die Graphen der Funktionen $h_1(x) = f(x) + g(x)$ und $h_2(x) = f(x) - g(x)$ mit roter Farbe.

10.9 Lösungen

Hinweise zu den Symbolen:

Diese Aufgaben könnten (mit kleinen Anpassungen) an einer Prüfung vorkommen. Für die Prüfungsvorbereitung gilt: "If you want to nail it, you'll need it".

Diese Aufgaben sind wichtig, um das Verständnis des Prüfungsstoffs zu vertiefen. Die Aufgaben sind in der Form aber eher nicht geeignet für eine Prüfung (zu grosser Umfang, nötige «Tricks», zu offene Aufgabenstellung, etc.). **Teile solcher Aufgaben können aber durchaus in einer Prüfung vorkommen!**.

Diese Aufgaben sind dazu da, über den Tellerrand hinaus zu schauen und/oder die Theorie in einen grösseren Kontext zu stellen.

Lösung zu Aufgabe 10.1 ex-zahlmengen-und-intervalle-akrobatik

a) Wahr.

b) Falsch. $R_0^- = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+$ oder $\mathbb{R}^- = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_0^+$ wäre wahr.

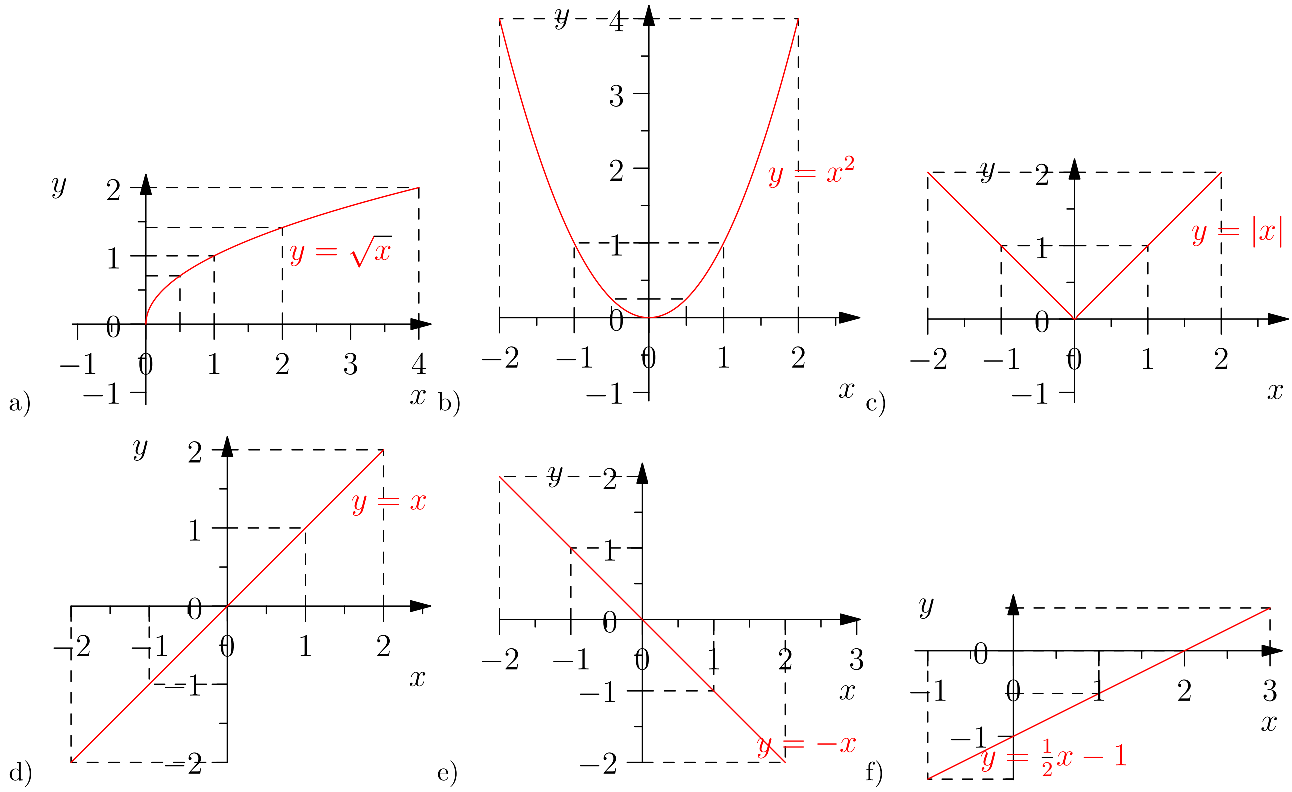
c) Wahr.

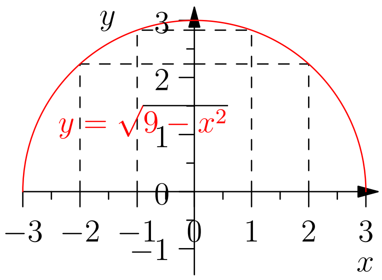
d) Falsch. $\mathbb{Q}^+ i_0 \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$ oder $\mathbb{Q}^+ \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}^*$ wäre wahr.

e) Wahr.

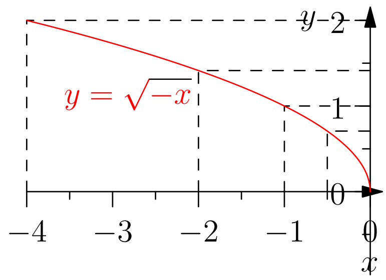
f) Falsch. Dazu sehe ich keine offensichtliche kleine Änderung (ausser $=$ durch $\neq$ zu ersetzen ;-).

Lösung zu Aufgabe 10.5 ex-funktionen-zeichnen

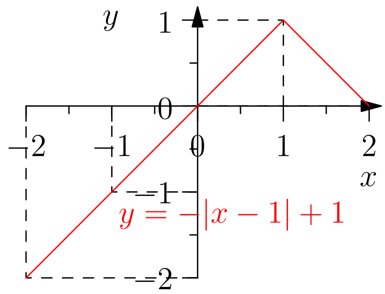




g)



h)



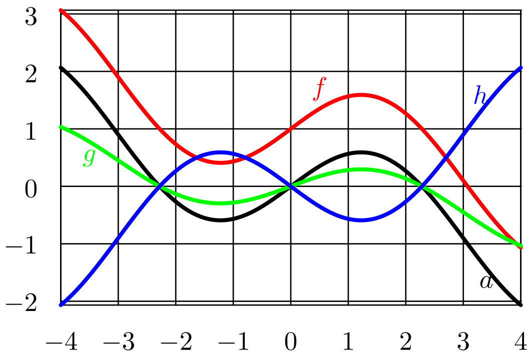
i)

Lösung zu Aufgabe 10.6 ex-funktionen-ablesen

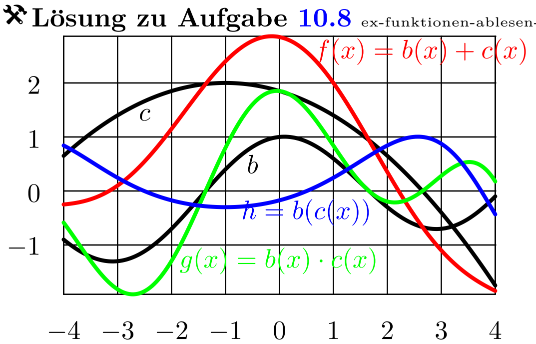
Die ungefähren Funktionswerte sind:

$f(-4)$	≈ 1.7	$g(-4)$	≈ 1.4	$h(-4)$	≈ -1.5
$f(-3)$	≈ 0	$g(-3)$	≈ 1.2	$h(-3)$	≈ -0.8
$f(-2)$	≈ -1.7	$g(-2)$	≈ 1	$h(-2)$	≈ 0
$f(-1)$	≈ -1.7	$g(-1)$	≈ 0.7	$h(-1)$	≈ 2
$f(0)$	≈ 0	$g(0)$	≈ 0.4	$h(0)$	≈ 0
$f(1)$	≈ 1.7	$g(1)$	≈ 0	$h(1)$	≈ -0.8
$f(2)$	≈ 1.7	$g(2)$	≈ -1	$h(2)$	≈ -1.5
$f(3)$	≈ 0	$g(3)$	nicht definiert	$h(3)$	≈ -2
$f(4)$	≈ -1.7	$g(4)$	nicht definiert	$h(4)$	≈ -2.5

Lösung zu Aufgabe 10.7 ex-funktionen-ablesen-transformieren



Lösung zu Aufgabe 10.8 ex-funktionen-ablesen-addieren-multiplizieren



Lösung zu Aufgabe 10.9 ex-funktionen-transformieren

a) Graph von z um 2 Einheiten nach oben verschieben.

b) Graph von z um 1 Einheit nach unten verschieben.

c) Graph von z um $|v|$ Einheiten nach oben (wenn $v \geq 0$) oder unten (wenn $v < 0$) verschieben.

d) Graph von z um Faktor 2 in y-Richtung strecken. D. h. alle Punkte auf dem Graphen sind danach doppelt so weit von der x-Achse entfernt.

e) Graph von z um Faktor $\frac{1}{2}$ in y-Richtung strecken. D. h. alle Punkte auf dem Graphen sind danach halb so weit von der x-Achse entfernt.

f) Graph von z wird an der x-Achse gespiegelt.

g) Graph von z wird an der x-Achse gespiegelt und mit Faktor 2 in y-Richtung gestreckt. (Bzw. einfach mit Faktor -2 an der x-Achse gestreckt.

Lösung zu Aufgabe 10.11 ex-lineare-funktionen-zeichnen

Ausgehend vom Graphen der Funktion $i(x) = x$ (die Winkelhalbierende zwischen der positiven x- und y-Achse), können die Graphen durch Streckung (und gegebenenfalls anschliessender Verschiebung) als Geraden gezeichnet werden.

a) Graph von i mit Faktor 3 in y-Richtung gestreckt. Ergibt eine Gerade durch den Nullpunkt, die um 3 y-Einheiten pro x-Einheit ansteigt.

b) Gerade durch den Nullpunkt, steigt um 1 y-Einheit pro 3 x-Einheiten an.

c) Graph von i an der x-Achse gespiegelt. Ergibt die «andere Winkelhablierende».

d) Graph von c mit Faktor $\frac{1}{2}$ gestreckt. Gerade durch den Nullpunkt, fällt um 1 y-Einheit pro 2 x-Einheiten.

e) Graph von i um 1 Einheit nach unten verschoben.

f) Graph von c um 1 Einheit nach oben verschoben.

g) Gerade durch den Punkt $(0, -2)$, die pro x-Einheit um 2 y-Einheiten ansteigt.

h) Gerade durch den Punkt $\left(0, \frac{2}{3}\right)$, die pro 3 x-Einheiten um eine y-Einheit abfällt.

Lösung zu Aufgabe 10.14 ex-spezielle-steigungen

Hinweis: In der Lösung hier werden nur positive Steigungen berechnet. Spiegelt man die Geraden an der x-Achse bleibt der Winkel gleich, die Steigung wird aber negativ. D. h. zu allen Aufgaben ist auch die entsprechend negative Steigung eine Lösung.

a) Die Steigung ist 0.

b) Man zeichnet ein 30°-60°-90°Stütz-Dreieck, z. B. so, dass die Hypotenuse 1 ist. Dann sind die Katheten $\frac{1}{2}$ (y-Differenz) und $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (x-Differenz). Die Steigung ist somit

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \ldots = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

c) Steigung 1.

d) Wie in b), einfach x und y vertauschen, also ist die Steigung $\sqrt{3}$.

e) Die Steigung ist nicht definiert, denn Division durch Null ist nicht definiert. (Genaugenommen hätte man diesen Fall in der Definition der Steigung ausschliessen müssen.) Die Steigung wäre quasi ∞.

Lösung zu Aufgabe 10.17 ex-lineare-funktionen-ablesen

a) y-Achsenabschnitt $q = \frac{1}{2}$. Steigung $m = \frac{1}{2}$ (z. B. mit den Punkten $(-1, 0)$ und $(1, 1)$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2}$. Also $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

b) y-Achsenabschnitt $q = -\frac{1}{2}$. Steigung $m = \frac{3}{2}$ (z. B. mit den Punkten $(-1, -2)$ und $(1, 1)$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{2}$. Also $f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$.

c) y-Achsenabschnitt $q = 1$. Steigung $m = -\frac{1}{3}$ (z. B. mit den Punkten $(0, 1)$ und $(3, 0)$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{3}$. Also $f(x) = -\frac{1}{3}x + 1$.

d) y-Achsenabschnitt $q = -\frac{3}{2}$. Steigung $m = -2$ (z. B. mit den Punkten $(-1, \frac{1}{2})$ und $(1, -\frac{7}{2})$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4}{2}$. Also $f(x) = -2x - \frac{3}{2}$.

Lösung zu Aufgabe 10.18 ex-intervalle-abbilen

a) $f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$
b) $f(x) = 2x + 2$ und $f(x) = -2x + 2$
c) $f(x) = 5x + 1$ und $f(x) = -5x + 6$
d) $f(x) = \frac{1}{5}x - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}(x-1)$ und $f(x) = -\frac{1}{5}x + \frac{6}{5} = -\frac{1}{5}(6-x)$
e) $f(x) = (b-a)\cdot x + a$ und $f(x) = (a-b)\cdot x + b$
f) $f(x) = \frac{x-a}{b-a} = \frac{1}{b-a}\cdot x - \frac{a}{b-a}$ und $f(x) = \frac{x-b}{a-b} = -\frac{1}{b-a}\cdot x + \frac{b}{b-a}$
g) $f(x) = \frac{x-a}{b-a}\cdot(d-c) + c$ und $f(x) = \frac{b-x}{b-a}\cdot(d-c) + c$

Aufgabe g) kann wie folgt aufgefasst werden:

1. Erst das Intervall verschieben: $f_1(x) = x - a$. Damit bildet man das Intervall $[a, b]$ auf $[0, b-a]$ ab.
2. Das verschobene verkleinert man auf das Intervall $[0, 1]$, indem man durch seine Länge dividiert, also $f_2(x) = \frac{x-a}{b-a}$. Damit bildet man auf $[0, 1]$.
3. Man vergrössert das Intervall auf die endgültige Länge, durch Multiplikation mit $(d-c)$, also $f_3(x) = \frac{x-a}{b-a}\cdot(d-c)$.
4. Zu letzt verschiebt man das Intervall an die endgültige Lage, durch Addition von c: $f_4(x) = f(x) = \frac{x-a}{b-a}\cdot(d-c) + c$.

Die zweite Funktion erhält man fast gleich, ausser dass man im ersten Schritt zusätzlich zum Verschieben das Intervall noch umdreht mit $f_1(x) = b - x$.

Lösung zu Aufgabe 10.19 ex-rechtwinklige-geraden

a)
b) $g(x) = -\frac{1}{2}x + 1$
c) Für eine Gerade mit Steigung $\frac{4}{3}$ kann ein Stützdreieck mit Katheten $\Delta x = 3$ und $\Delta y = 4$ gezeichnet werden. Dieses Dreieck wird um 90 Grad gedreht. Das neue Stützdreieck der Senkrechten hat die Katheten vertauscht, wobei eine noch das Vorzeichen wechselt. Die neue Steigung ist also $-\frac{3}{4}$.

Lösung zu Aufgabe 10.21 ex-schnittpunkt

Wenn x die x-Koordinate des Schnittpunktes ist, gilt

$$\begin{aligned}
f(x) &= g(x) & & \\
-\frac{1}{3}x - 1 &= \frac{3}{2}x + 1 & &\mid \cdot 6 \\
-2x - 6 &= 9x + 6 & &\mid +2x - 6 \\
-12 &= 11x & &\mid : 11 \\
-\frac{12}{11} &= x & &
\end{aligned}$$

Eingesetzt in eine der Funktionen: $f\left(-\frac{12}{11}\right) = \frac{12}{33} - 1 = -\frac{7}{11}$. Zur Kontrolle (nicht wirklich nötig) eingesetzt in g: $g\left(-\frac{12}{11}\right) = -\frac{36}{22} + 1 = -\frac{7}{11}$.
Und damit sind die Koordinaten des Schnittpunktes: $\left(-\frac{12}{11}, -\frac{7}{11}\right)$

Lösung zu Aufgabe 10.22 ex-rechtwinkliges-dreieck-konstruieren

Vorgehen: Zuerst werden die Funktionsgleichungen der Geraden b und $a = BC$ bestimmt. Dann wird der Schnittpunkt bestimmt.

Geradengleichung von b (Steigung $\frac{3}{2}$): $b(x) = \frac{3}{2}x + q_b$. Es gilt $A \in b$: Setzt man die x-Koordinate von A in die Funktion b ein, erhält man die y-Koordinate von A:

$$\begin{aligned} b(-2) &= -1 \\ \frac{3}{2} \cdot -2 + q_b &= -1 \\ -3 + q_b &= -1 && \mid +3 \\ q_b &= 2 \end{aligned}$$

Die Gerade a ist rechtwinklig zu b, hat also die Steigung $-\frac{1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}$. Es gitl $B \in a$, also

$$\begin{aligned} a(3) &= 1 \\ -\frac{2}{3} \cdot 3 + q_a &= 1 \\ -2 + q_a &= 1 && \mid +2 \\ q_a &= 3 \end{aligned}$$

Es ist also der Schnittpunkt der Geraden $a(x) = -\frac{2}{3}x + 3$ und $b(x) = \frac{3}{2}x + 2$ zu bestimmen:

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3}x + 3 &= \frac{3}{2}x + 2 && \mid -2 + \frac{2}{3}x \\ 1 &= \frac{13}{6}x && \mid \cdot \frac{6}{13} \\ \frac{6}{13} &= x \end{aligned}$$

Die y-Koordinate des Schnittpunktes erhält man durch Einsetzen (in a oder b):

$$a\left(\frac{6}{13}\right) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{13} + 3 = \frac{35}{13}$$

Kontrolle (eigentlich unnötig):

$$b\left(\frac{6}{13}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{13} + 2 = \frac{35}{13}$$

Damit sind die Koordinaten von $C = \left(\frac{6}{13}, \frac{35}{13}\right) \approx (0.4615, 2.6923)$.

Lösung zu Aufgabe 10.23 ex-koordinaten-quadrat

Das Stützdreieck unter $[AB]$ hat die Katheten $\Delta x = 5$ und $\Delta y = -3$. Dreht man das Stützdreieck um 90° und hängt es bei A und B an, erhält man die Punkte C und D, d. h. $C = (2 + 3, -2 + 5) = (5, 3)$ und $D = (-3 + 3, 1 + 5) = (0, 6)$.

Lösung zu Aufgabe 10.24 ex-koordinaten-rechtw-dreieck

In der POV-Ray Datei sind am Anfang folgende Variablen definiert:

- x_a (in POV-Ray `xa`): Die x-Koordinate vom Punkt A.
- x_b (in POV-Ray `xb`): Die x-Koordinate vom Punkt B.
- m_b (in POV-Ray `mb`): Die Steigung der Seite b.

Aus diesen Variablen werden sukzessive alle weiteren Grössen berechnet.

Geraden b und a und der Punkt C

Die Gerade b hat folgende Funktionsgleichung:

$$f_b(x) = m_b \cdot x + q_b$$

wobei q_b im Moment noch unbekannt ist. Da der Punkt $A = (x_a, 0)$ auf b liegt, gilt folgende Gleichung (die dann nach q_b aufgelöst wird):

$$\begin{aligned} f(x_a) &= 0 \\ m_b \cdot x_a + q_b &= 0 && \mid -m_b \cdot x_a \\ q_b &= -m_b \cdot x_a \end{aligned}$$

Damit lässt sich in POV-Ray die Variable q_b wie folgt definieren:

```
#declare qb = -mb*xa;
```

Die Steigung der Gerade a lässt sich aus der Steigung der Geraden b berechnen, da diese rechtwinklig aufeinander stehen. Es gilt für rechtwinklige Steigungen m und $m_\perp$:

$$m_\perp = -\frac{1}{m}$$

also

$$m_a = -\frac{1}{m_b}$$

oder in POV-Ray Code ausgedrückt:

```
#declare ma = -1/mb;
```

Für den Achsenabschnitt q_a verfährt man genau gleich wie bei q_b. Es gilt:

$$q_a = -m_a \cdot x_b$$

Für den Schnittpunkt $C = a \cap b$ mit x-Koordinate x_c gilt:

$$\begin{aligned} f_a(x_c) &= f_b(x_c) \\ m_a \cdot x_c + q_a &= m_b \cdot x_c + q_b && \mid -q_a - m_b \cdot x_c \\ x_c(m_a - m_b) &= q_b - q_a && \mid : (m_a - m_b) \\ x_c &= \frac{q_b - q_a}{m_a - m_b} \end{aligned}$$

also

```
#declare xc = (qb-qa)/(ma-mb);
```

Die y-Koordinate y_c von C erhält man durch Einsetzen:

$$x_c = f_a(x_c) = m_a \cdot x_c + q_a$$

also

```
#declare yc = ma*xc+qa;
```

Punkte A_b und C_b

Man zeichnet das Steigungsdreieck für die Gerade b an den Punkten A und C. Man dreht das Dreieck um 90° um A im Gegenuhrzeigersinn. Man subtrahiert also von der x-Koordinate von a den y-Unterschied zwischen A und C, d. h. $x_a - (y_c - 0)$. Zur y-Koordinate von A wird der x-Koordinatenunterschied zwischen A und C addiert, d. h. $0 + (x_c - x_a)$. Als POV-Ray Code:

```
#declare Ab=<xa-yc, xc-xa, 0>;
```

Die Gleichen Koordinatenunterschiede werden den Koordinaten von C hinzugerechnet, also:

```
#declare Ab=<xc-yc, yc+xc-xa, 0>;
```

Punkte `Abtop`, `Cbtop` und `Cbbottom`

Zuerst ermittelt man die Funktionsgleichung der Parallen b_2 zu b durch A_b.Die Steigung ist die gleiche, nämlich m_b. Der Achsenabschnitt kann entweder wie am Anfang berechnet werden, oder man sieht ein, dass der vertikale Abstand genau der Seite c entspricht. Man erhält auf beide Weisen $q_{b_2} = q_b + (xb - xa)$ oder in POV-Ray Code:

```
#declare q2b=qb+(xb-xa);
```

Man kennt die x-Koordinaten (x_a, bzw. x_c). Durch einsetzen in die Funktionsgleichung f_b erhält man die y-Koordinaten. Oder man sieht ein, dass der Abstand der Punkte A und $A_{b_{\text{top}}}$ gleich der Seite c ist, also sind die y-Koordinaten $0 + (x_c - x_a)$, bzw. $y_c + (x_c - x_a)$. In POV-Ray Code:

```
#declare Abtop=<xa,xc-xa,0>;
```

und

```
#declare Cbtop=<xc,yc+xc-xa,0>;
```

Die Koordinaten von $C_{b_{\text{bottom}}}$ sind x_c für x und c für y wobei $c = x_c - x_a$. Also

```
#declare Cbbottom=<xc,xc-xa,0>;
```

Lösung zu Aufgabe 10.25 ex-geraden-durch-punkte

a) Steigungen $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$: $m_a = \frac{3}{2}$, $m_b = 0$, $m_c = -1$.

Achsenabschnitte: Ein Punkt auf der Geraden in die Funktionsgleichung mit unbekanntem q einsetzen, nach q auflösen. Beispiel für die Gerade a:

$$\begin{aligned} f_a(1) &= -2 \\ m_a \cdot 1 + q_a &= -2 \\ \frac{3}{2} + q_a &= -2 && \left| -\frac{3}{2} \right. \\ q_a &= -\frac{7}{2} \end{aligned}$$

Entsprechend $q_b = 1$, $q_c = -1$ und damit

$$f_a(x) = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2} \qquad f_b(x) = 1 \qquad f_c(x) = -x - 1$$

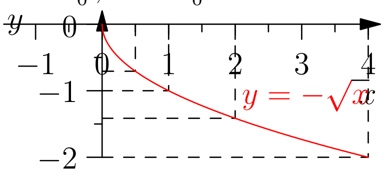
b) Nein, da $m_a \neq -\frac{1}{m_c}$

c) $f_h(x) = m_h \cdot x + q_h$ mit $m_h = -\frac{1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}$. q_h erhält man durch Einsetzen der Koordinaten von A und Auflösen nach q_h. Resultat: $f_h(x) = -\frac{2}{3} \cdot x - \frac{1}{3}$.

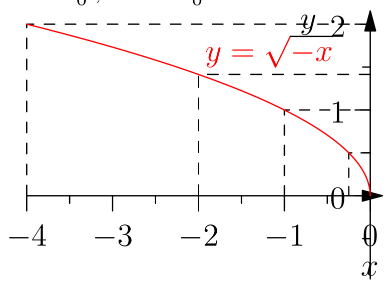
d) Auflösen der Gleichung $f_a(x) = f_h(x) \Leftrightarrow \frac{3}{2}x - \frac{7}{2} = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ liefert $x = \frac{19}{13}$. Eingesetzt erhält man $y = f_a(\frac{19}{13}) = \frac{3}{2} \cdot \frac{19}{13} - \frac{7}{2} = -\frac{34}{26} = -\frac{17}{13}$

Lösung zu Aufgabe 10.26 ex-funktionsgraphen-zeichnen

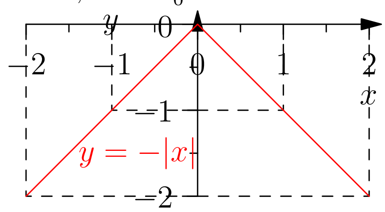
a) $\mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+$, $\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^-$



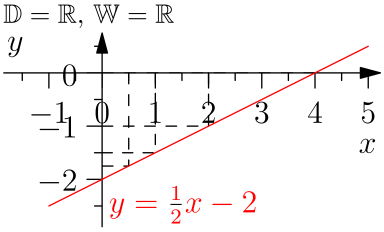
b) $\mathbb{D} = \mathbb{R}_0^-$, $\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$



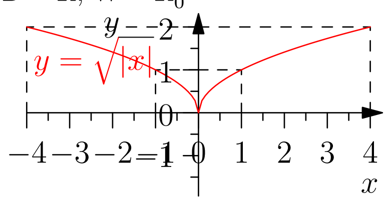
c) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^-$



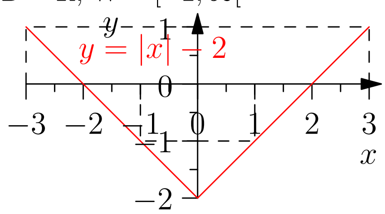
d) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{W} = \mathbb{R}$



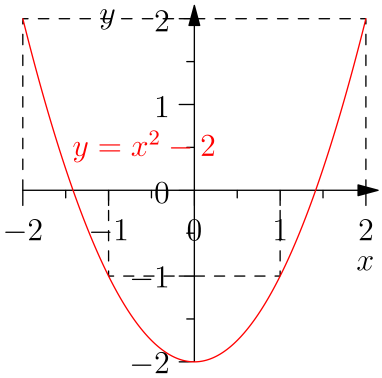
e) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$



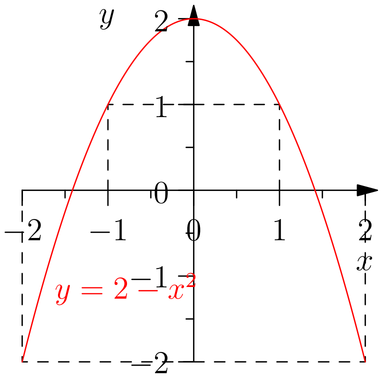
f) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{W} = [-2, \infty[$



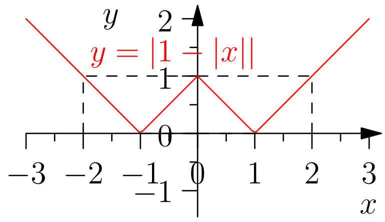
g) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{W} = [-2, \infty[$



h) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{W} =]-\infty, 2]$



i) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$



Lösung zu Aufgabe 10.27 ex-transformation-unbekannte-funktion

a) Nur die Werte für $x = -1$, 0 und 2 sind bestimmt. Alle anderen Werte sind frei wählbar. Es gibt also unendlich viele solche Graphen (diese Unendlichekeit ist sogar noch grösser als jene der reellen Zahlen, wenn der Funktionsgraph nicht eine durchgehende Linie sein muss).

b) g: Der Graph wird um 2 Einheiten nach oben verschoben. h: der Graph wird an der x-Achse gespiegelt. k: der Graph wird um zwei Einheiten **nach links** verschoben (die Eingabe ist quasi zwei Einheiten zu früh).

c) Nice try…

Lösung zu Aufgabe 10.28 ex-abstand-paralleler-geraden

c) Eine Möglichkeit besteht darin, die Konstruktion rechnerisch nachzuvollziehen. Es wird also eine Rechtwinklige mit beiden Geraden geschnitten, z. B. die Gerade mit der Funktionsgleichung $k(x) = -\frac{1}{2}x$.
Man löst die Gleichungen $f(x) = k(x)$ und $g(x) = k(x)$ und erhält den Schnittpunkt mit f $\left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right)$ und mit g: $\left(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$. Der Abstand der beiden Punkte beträgt $\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{20}{25}} = \sqrt{\frac{2^2 \cdot 5}{5^2}} = \frac{2}{5}\sqrt{5} \approx 0.89443$

d) Seien $f(x) = mx$ und $g(x) = mx - q$. Die Gleichung einer Rechtwinkligen Gerade ist $k(x) = -\frac{1}{m}x$. Der Schnittpunkt mit f ist $(0, 0)$, der Schnittpunkt mit g ist $\left(\frac{q}{m+\frac{1}{m}}, -\frac{q}{m^2+1}\right)$. Der Abstand der beiden Punkte ist also $\sqrt{\left(\frac{q}{m+\frac{1}{m}}\right)^2 + \left(\frac{q}{m^2+1}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{qm}{m^2+1}\right)^2 + \left(\frac{q}{m^2+1}\right)^2} = \sqrt{\frac{q^2(m^2+1)}{(m^2+1)^2}} = \frac{q\sqrt{m^2+1}}{m^2+1} = \frac{q}{\sqrt{1+m^2}}$

Lösung zu Aufgabe 10.29 ex-wahr-oder-falsch

a) **Falsch**. Das gilt nicht wenn die Punkte vertikal übereinander liegen (gleiche x-Koordinate, unterschiedliche y-Koordinaten). Um die Aussage wahr zu machen, könnte man «…Punkte mit unterschiedlichen x-Koordinaten…» schreiben.

b) **Wahr**. Der einzige Streitpunkt hier ist, ob man identische (übereinanderliegende) Geraden ebenfalls als parallel bezeichnet.

c) **Falsch**. Sie schneiden sich auf der y-Achse.

d) **Falsch**. Die neue Funktion ist einfach $g(x) = -f(x)$, also an der x-Achse gespiegelt.

e) **Falsch**. Die Steigung ist Null.

f) **Wahr**. 1 y-Einheit pro x-Einheit.

g) **Falsch**. Vertikale Geraden haben keine definierte Steigung (wäre quasi unendlich).

h) **Wahr**. $m \cdot -\frac{1}{m} = -1$.

i) **Falsch**. Richtig wäre z. B. «Erhöht man den y-Achsenabschnit um 2…».

j) **Wahr**. $h(x) = 2 \cdot f(x) = 2 \cdot (mx + q) = 2m \cdot x + 2q$.

k) **Wahr.** $f(x) = m_f x + q_f$, $g(x) = m_g x + q_g$, also $h(x) = (m_f + m_g)x + (q_f + q_g)$.

l) **Wahr.** Wie in k) erhält man $h(x) = f(m_g x + q_g) = m_f \cdot (m_x x + q_g) + q_f = m_f m_g \cdot x + (m_f q_g + q_f)$.

m) **Falsch**. Z. B. für $f(x) = x$ und $g(x) = x$ ist $h(x) = x^2$ nicht linear.

n) **Wahr**. Überprüfen durch einsetzen der x-Koordinaten in die Funktionen.

o) **Wahr**. Die Gleichung $f(x) = g(x)$ vereinfacht sich auf eine lineare Gleichung (x^2 fällt weg) und die hat genau eine Lösung (der Koeffizient von x ist nicht Null).

p) **Falsch**. Man kann z. B. die Graphen zeichnen, oder die Gleichung $f(x) = g(x)$ umformen, um $x^2 = -1$ zu finden, was keine Lösung hat.

q) **Falsch**. Z. B. $f(x) = x^2$ und $g(x) = x - x^2$. Die Summe ist $h(x) = x$ linear.

r) **Falsch**. Das Produkt genau dann ein lineare Funktion, wenn in mindestens einer Funktion die Steigung gleich Null ist (und damit der quadratische Term wegfällt).

s) **Flasch**. Das ist nur wahr, wenn die Geraden horizontal sind.

t) **Falsch**. Der Punkt $(x, f(x))$ liegt auf dem Graphen. Man könnte auch noch monieren, dass x aus dem Definitionsbereich kommen muss.

u) **Falsch**. Die Skala ist linear bis zur für die Note 6 benötigte Punktzahl. Dort macht der Graph einen Knick, Noten über 6 werden nicht gemacht. Genau genommen setzt sich die Skala aus zwei linearen Funktionen zusammen.

v) **Falsch**. Das würde eine konstante Durschnittsgeschwindigkeit (=Steigung!) voraussetzen, was nicht realistisch ist.

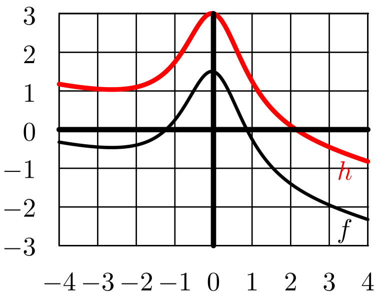
Lösung zu Aufgabe 10.30 ex-funktionen-auswerten

Definitionsbereiche: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathbb{D}_g =]-\infty, 5]$, $\mathbb{D}_h = \mathbb{R}$, $\mathbb{D}_k = R^*$ (alles ausser 0).
Wertebereiche: $\mathbb{W}_f = [-1, \infty]$, $\mathbb{W}_g = \mathbb{R}_0^+$, $\mathbb{W}_h = \mathbb{R}_0^+$, $\mathbb{W}_k = R^*$.

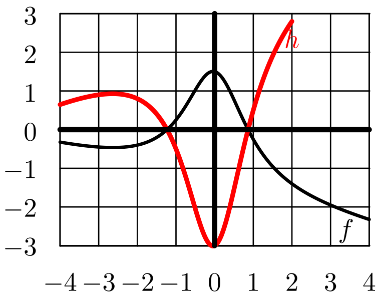
a) 35
b) 2
c) 4
d) -3
e) $h(-1) = 3$
f) $k(6) = \frac{1}{2}$
g) $g(-h(3)) = g(-1) = \sqrt{6}$
h) $g(-(8+2)) = g(-10) = \sqrt{15}$
i) $\frac{3}{a} \cdot (a^2 - 2a) = 3(a-2)$
j) $(a+b)^2 - 2(a+b) + 3(a+b) + 1 = (a+b)^2 + (a+b) + 1$
k) $(a+1) \cdot (a-1) \cdot \frac{3}{a-1} = 3(a+1)$
l) $|x^2| = x^2$

Lösung zu Aufgabe 10.31 ex-graphen-abslesen-manipulieren

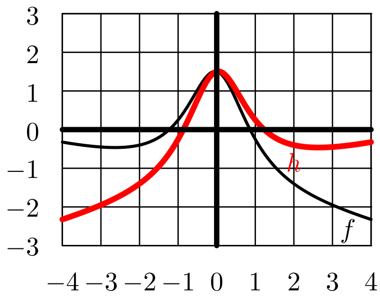
a) $h(x) = f(x) + \frac{3}{2}$



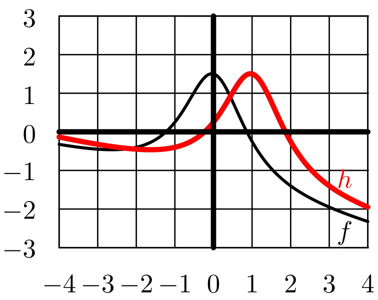
b) $h(x) = -2 \cdot f(x)$



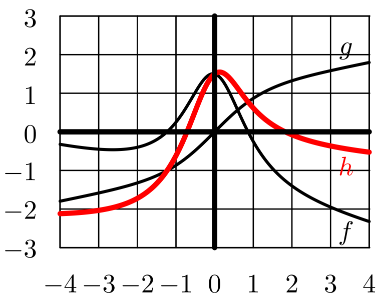
c) $h(x) = f(-x)$



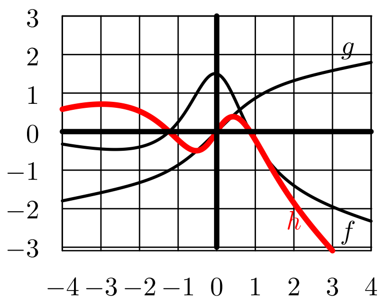
d) $h(x) = f(x-1)$



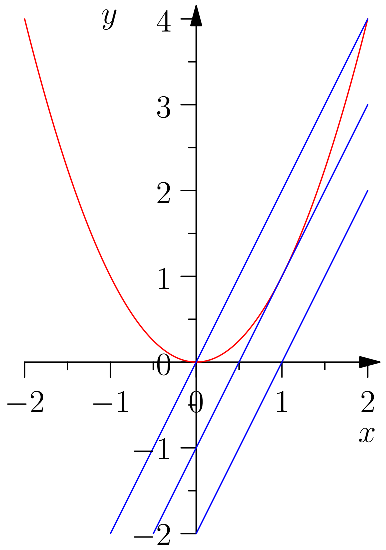
e) $h(x) = f(x) + g(x)$



f) $h(x) = f(x) \cdot g(x)$



Lösung zu Aufgabe 10.32 ex-funktionen-tr



b) `solve(x*x=2*x-2,x)` liefert `false`, d. h. eine falsche Aussage, d. h. es gibt kein x für das diese Gleichung wahr wäre. Es gibt also keinen Schnittpunkt für $q = -2$.
Für $q = -1$ erhält man die Lösung $x = 1$ und damit den (einzigen) Schnittpunkt $(1, 1)$.
für $q = 0$ erhält man 2 Lösungen, $x = 0$ und $x = 2$, also die Schnittpunkte $(0, 0)$ und $(2, 4)$.

c) Für $q = -2$ kann die Gleichung auf die Form $x^2 - 2x + 1 = -1$ gebracht werden, wobei die linke Seite ein Binom ist, also $(x-1)^2 = -1$. Ein Quadrat kann aber nie negativ sein, darum hat diese Gleichung keine Lösung.
Für $q = -1$ kann die Gleichung auf die Form $(x - 1)^2 = 0$ gebracht werden. Es gibt nur eine einizge Zahl, die quadriert 0 ergibt, nämlich 0 selbst. Also ist $x = 1$ die einzige Lösung.
Für $q = 0$ kann die Gleichung auf die Form $x(x-2) = 0$ gebracht werden. D. h. entweder ist $x = 0$ oder $(x - 2) = 0$.

Lösung zu Aufgabe 10.33 ex-funktionen-tr2

a) Die Zahl unter der Wurzel darf nicht negativ sein, also ist $\mathbb{D} = [-1, 1]$. Der Wertebereich ist $[0, 1]$.

b) und c):