1 Zahlenmengen

Ein Alleinstellungsmerkmal der Mathematik ist, dass man nichts glauben muss, sondern alle mathematischen Sachverhalte bewiesen werden können (und als Mathematiker müssen!), bis auf ganz wenige Grundannahmen, die sogenannten Axiome.

Fast die gesamte moderne Mathematik kann auf 10 Axiome der Mengenlehre zurückgeführt werden. Siehe z.B. https://de.wikipedia.org/wiki/Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre.

Damit die Zahlen zu definieren ist zwar sehr spannend, aber formell etwas zu anspruchsvoll. Auch die 5 *Peano-Axiome*, die die natürlichen Zahlen definieren sind für unsere Zwecke zu formell und wenig intuitiv. Siehe z.B. https://de.wikipedia.org/wiki/Peano-Axiome.

Wir werden deshalb die Zahlen geometrisch auf einem Zahlenstrahl definieren.

1.1 Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$

Die Zahlen 1, 2, 3, ... sind natürlich in dem Sinne, dass (fast) jeder Mensch lernt zu zählen. Auch die grundlegenden Operationen wie Addition und Multiplikation sind für kleine Zahlen intuitiv erfassbar (z.B. durch Zählen und Rechnen mit den Fingern) und werden mit dem Gebrauch einleuchtend. Niemand zweifelt daran, dass die Rechengesetze, die wir mit kleinen natürlichen Zahlen intuitiv als universal gültig erfahren, auch für beliebig grosse natürliche Zahlen gültig sind.

1.1.1 Permanenzprinzip

Das **Permanenzprinzip** ist die Forderung, dass die gewohnten Rechengesetze ihre Gültigkeit bewahren, wenn der Zahlenbereich ausgedehnt wird auf negative Zahlen, Bruchzahlen und reelle Zahlen. Und schliesslich auch die komplexen Zahlen, mit denen wir uns aber kaum beschäftigen werden.

1.1.2 Die Sache mit der Null

Die Zahl Null ist intuitiv viel schwieriger als Zahl zu erfassen, warum sollte «Nichts» eine Zahl sein? Die Null als Zahl zu begreifen kann zu Recht als eine der ersten Meisterleistungen in der Mathematik betrachtet werden. Erst die Null ermöglicht die Darstellung der Zahlen im Stellenwertsystem (normalerweise im Zehnersystem) und effizientes Rechnen.

Besonders in der Informatik wird normalerweise bei 0 begonnen zu zählen. D.h. das erste Element in einer Liste hat den Index 0. Das ist zwar auf den ersten Blick ungewöhnlich, vereinfacht aber vieles. In der Mathematik wird aber sehr oft noch bei 1 begonnen zu zählen, d.h. das erste Element einer Liste hat den Index 1. Auch die Menge der natürlichen Zahlen wird auf Stufe Mittelschule noch oft ohne die Null definiert, auf Stufe Universität aber fast ausschliesslich mit der Null.

Definition 1.1 Natürliche Zahlen, $\mathbb{N}$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
Lies: «$\mathbb{N}$ ist die Menge mit den Elementen 0, 1, 2, 3, 4, u.s.w.».

1.1.3 Mengen und Elemente

Definition 1.2 Menge

Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von wohldefinierten **Elementen**. Für jedes mögliche Element kann unzweifelhaft festgestellt werden, ob es zur Menge gehört oder nicht.

Die Reihenfolge der Elemente in der Menge ist nicht relevant. Auch spielt es keine Rolle, wie oft ein Element in einer Menge vorkommt. Es geht alleine um die Zugehörigkeit.