 Ivo Blöchliger

Die Zugehörigkeit wird mit dem Zeichen «$\in$» notiert, z.B.

$7 \in \mathbb{N}$	$\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$
«7 ist Element von $\mathbb{N}$»	«Wurzel 2 ist nicht Element von $\mathbb{N}$»

Beispiele für Mengen sind:

Aufzählende Form	Beschreibende Form
$\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ «Die Menge mit den Elementen 0, 2, 4, 6, u.s.w.»	$\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist gerade.}\}$ «Die Menge aller x in $\mathbb{N}$ für die gilt: x ist gerade.»
$\{0, 1, 4, 9, 16, \ldots\}$ «Die Menge mit den Elementen 0, 1, 4, 9, 16, u.s.w.»	$\{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ «Die Menge aller n^2 für die gilt n ist natürlich.
$\{10, 11, 12, \ldots, 18, 19\}$ «Die Menge mit den Elementen 10,11,12, usw. bis 18, 19.»	$\{k \in \mathbb{N} \mid 10 \leq k \leq 19\}$ «Die Menge aller natürlichen k für die gilt 10 ist kleiner gleich k und k ist kleiner gleich 19.»

Keine Mengen sind:

Die Menge aller Frauen	Der Term «Frau» ist nicht wohldefiniert (Alter, Chromosomenausstattung, etc.)
Die Menge aller Schönwettertage im Juli 2021	«Schön Wetter» ist nicht wohldefiniert. (Pilzsammler vs. Gleitschirmpiloten).

Wir beschränken uns also auf Mengen von mathematisch definierten Elementen, typischerweise Zahlen oder geometrische Objekte wie Punkte.

Aufgabe 1.1 Schreiben Sie folgende Mengen in aufzählender und beschreibender Form:

a) Die Menge der Primzahlen.

b) Die Menge der Vielfachen von 37.

c) Die Menge der Kubikzahlen kleiner als 1111.

d) Die Menge der Zweierpotenzen.

1.2 Operationen in $\mathbb{N}$

Die Grundoperationen in $\mathbb{N}$ können auf dem Zahlenstrahl definiert werden.
Ein Zahlenstrahl kann wie folgt konstruiert werden: Auf einer Geraden werden zwei unterschiedliche Punkte 0 und 1 markiert (typischerweise die 1 rechts von der 0). Dann wird die Strecke von 0 zu 1 wiederholt nach rechts abgetragen:

1.2.1 Addition

Um zwei natürliche Zahlen a und b auf dem Zahlenstrahl zu addieren, wird die Strecke von 0 zu a bei b nach rechts abgetragen um $c = a + b$ zu erhalten.
Damit sind folgende wichtige Eigenschaften einleuchtend:

- $a + b \in \mathbb{N}$ wenn $a, b \in \mathbb{N}$ (Abgeschlossenheit).
- $a + b = b + a$ (Kommutativgesetz).
- $(a + b) + c = a + (b + c)$ (Assoziativgesetz).

1.2.2 Multiplikation

Die Multiplikation zweier natürlichen Zahlen a, b kann als wiederholte Addition aufgefasst werden, d.h.

$$a \cdot b = \underbrace{b + b + \ldots + b}_{\text{Anzahl Summanden: } a}$$