Die Abgeschlossenheit folgt direkt aus der Abgeschlossenheit der Addition.

Aufgabe 1.2

a) Finden Sie überzeugende Argumente für das Kommutativgesetz der Multiplikation, d.h. dafür, dass $a \cdot b = b \cdot a$ für **alle** natürlichen Zahlen. *Nur weil es für das Einmaleins stimmt, heisst noch nicht, dass es für grosse Zahlen nicht einmal Ausnahmen geben könnte!*

b) Gleiche Aufgabe für $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Aufgabe 1.3 An einem Gegenbeispiel soll hier gezeigt werden, dass es kommutative Operationen gibt, die aber nicht assoziativ sind.

Dazu betrachten wir das Spiel «Schere, Stein, Papier», oder auf Englisch «rock, paper, scissors». Sei $M = \{r, p, s\}$ die Menge der drei Symbole für rock, paper, scissors.

Man definiert die Operation $*$ so, dass das Resultat der «Sieger» der beiden Symbole ist, z.B. $r * p = p$, weil paper rock schlägt. Weiter definieren wir $x * x = x$ für $x \in M$ im Falle eines Unentschiedens.

Ist die Operation kommutativ? Ist sie assoziativ?

1.3 Subtraktion und ganze Zahlen $\mathbb{Z}$

Das Resultat der Subtraktion $a - b$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ ist nur dann wieder eine natürliche Zahl, wenn $a \geq b$. Auf dem Zahlenstrahl wird der Abstand von 0 zu b bei a *nach links* abgetragen, um zum Resultat zu kommen.

Damit die Subtraktion immer ausgeführt werden kann, müssen die natürlichen Zahlen um die negativen Zahlen erweitert werden.

Definition 1.3 Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

Die **Menge der ganzen Zahlen** $\mathbb{Z}$ ist definiert als

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

1.3.1 Minuszeichen: 3 Arten

Das Minuszeichen hat **drei** verschiedene Bedeutungen:

Operationszeichen	für die Subtraktion	z.B. $8 - 3$
Vorzeichen	bei negativen Zahlen	z.B. -15
Bilden der Gegenzahl	(Spiegelung an 0)	z.B. $-(4+2)$

1.3.2 Multiplikation in $\mathbb{Z}$

Die Multiplikation $n \cdot z$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{Z}$, $z < 0$ ist geometrisch wohl definiert, es wird n mal die Strecke von 0 bis z nach links abgetragen, und es gilt $n \cdot z = \underbrace{z + z + \ldots + z}_{\text{Anzahl Summanden: } n}$.

Mit dieser Definition lässt sich aber $z \cdot n$ nicht ohne weiteres definieren; eine negative Anzahl Strecken ist schwierig zu handhaben. Das Permanenzprinzip verlangt aber, dass die Rechengesetze erhalten bleiben, und damit lässt sich $z \cdot n = n \cdot z$ definieren.

Wir halten fest: Das Produkt einer positiven Zahl und einer negativen Zahl ist selbst negativ.

Multiplikation mit -1

Mit der geometrischen Definition ist klar dass $n \cdot (-1) = -n$ für $n \in \mathbb{N}$. Ein Minuszeichen kann durch die Multiplikationen mit -1 ersetzt werden: